

Algebra-Berichte



Seminar F. KASCH, B. PAREIGIS

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN



VERLAG UNI-DRUCK MÜNCHEN

1978



Zu beziehen bei Verlag Uni-Druck, Amalienstraße 83, 8000 München 40, Tel. (0 89) 28 20 22

REFLEXIVE MODULN ÜBER

PERFEKTEN RINGEN

Rainer Schulz

Bericht Nr. 36, 1978



Digitized by the Internet Archive
in 2026

REFLEXIVE MODULN ÜBER
PERFEKTEN RINGEN

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München



vorgelegt von

Rainer Schulz

aus Bremen

eingereicht im Mai 1978



1. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Kasch

2. Berichterstatter: Dr. W. Zimmermann

Tag der mündlichen Prüfung: 28.7.78

Inhalt

Einleitung	1
§1. Unendliche Kompositionsketten; die Länge von Moduln	7
§2. Ringe, deren reflexive Moduln endlich erzeugt sind	19
§3. Ein Verfahren zur Konstruktion nicht endlich erzeugter reflexiver Moduln	29
§4. Reflexive Moduln über semi-primären Ringen vom Nilpotenzgrad 2	34
§5. Dualitätseigenschaften von Moduln über QF-Ringen	41
§6. Morita-Äquivalenz und Dualitätseigenschaften	46
§7. Frobenius-Erweiterungen und Dualitätseigenschaften	55
Literatur	62

EINLEITUNG

Ist M_R ein Rechtsmodul über dem Ring R , so bezeichnet $M^* := \text{Hom}_R(M, R)$ den zu M dualen Modul. M^* ist vermöge $(rf)(m) := r \cdot f(m)$ ($r \in R$, $f \in M^*$, $m \in M$) ein R -Linksmodul. Entsprechend erhält man zu einem R -Linksmodul den dualen R -Rechtsmodul. M heißt reflexiv (bzw. torsionslos, bzw. voll), wenn der natürliche R -Homomorphismus

$$\phi_M : M \ni m \longmapsto (f \longmapsto f(m)) \in M^{**} \quad (f \in M^*)$$

bijektiv (bzw. injektiv, bzw. surjektiv) ist.

Historischer Ausgangspunkt des Interesses für die Eigenschaften dualer Moduln war der Spezialfall eines Vektorraumes V über einem Körper K . Folgende "Dualitätseigenschaften" eines Vektorraumes sind seit langem bekannt und finden in fast allen Gebieten der Mathematik Anwendung:

Genau dann ist V_K endlich-dimensional, wenn $\dim_K V^* = \dim V_K$ gilt; ist $\dim V_K = \infty$, so gilt $\dim_K V^* = |K|^{\aleph_0} > \dim V_K$. In ϕ_V spiegeln sich diese Sätze so wider: ϕ_V ist stets injektiv; ϕ_V ist genau dann bijektiv, wenn V_K endlich-dimensional ist.

Es ist naheliegend, verallgemeinernd von Körpern auf beliebige Ringe R *) Dualitätseigenschaften von R -Moduln

*) Ringe und Moduln sind hier stets unitär

zu untersuchen. Dazu gibt es bisher zwei wesentlich verschiedene Ansätze. Der erste setzt voraus, daß R noethersch ist und beschränkt sich auf die Kategorien der endlich erzeugten R -Rechts- bzw. R -Linksmoduln (diese sind dann abgeschlossen unter $\text{Hom}_R(-, R)$). Dieudonné [5] kennzeichnet QF-Ringe durch die "perfekte Dualität" ihrer endlich erzeugten Moduln; Bass [2] und Jans [10][11] geben Zusammenhänge zwischen Dualitätseigenschaften der endlich erzeugten Moduln und den homologischen Dimensionen von R an.

Der zweite Ansatz stammt von Morita [17]. Hier wird vorausgesetzt, daß R ein Ring mit vollkommener Dualität ist (d.h. links und rechts injektiver Kogenerator). Daraus resultiert eine Dualität zwischen der Kategorie der reflexiven R -Rechtsmoduln und der Kategorie der reflexiven R -Linksmoduln. (Diese Theorie wird noch allgemeiner entwickelt, indem R im Funktor $\text{Hom}_R(-, R)$ durch einen geeigneten Bimodul ${}_S U_R$ ersetzt wird.)

Im Hinblick auf den oben erwähnten Spezialfall $R = K$ Körper erscheinen folgende Klassen von Ringen interessant:

- (1) Ringe, über denen jeder endlich erzeugte Modul reflexiv ist
- (2) Ringe, über denen jeder reflexive Modul endlich erzeugt ist.

(1) besteht nach Morita [17] genau aus den Ringen mit vollkommener Dualität. Ringe, die sowohl zu (1) als auch zu (2) gehören, sind nach Dieudonné [5], Morita [17] und Schneider [25] genau die QF-Ringe.

Es stellt sich die Frage, ob neben den QF-Ringen noch weitere Ringe zu (2) gehören. Die beschriebenen Ansätze zum Studium von Dualitätseigenschaften liefern darauf keine Antwort. In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch gemacht, eine Methode aufzufinden, die diese Frage und benachbarte Probleme einer Lösung näherbringt. Wie es schon im Titel der Arbeit zum Ausdruck kommt, ist die Perfektheit des zugrundeliegenden Ringes dabei eine wesentliche Voraussetzung.

In §1 betrachten wir vorbereitend "unendliche aufsteigende Kompositionsketten" von Moduln (Def. 1.1). Wir kennzeichnen halbartinische Moduln durch die Eigenschaft, aufsteigende Kompositionsketten zu besitzen, geben eine Verallgemeinerung des Satzes von Jordan-Hölder-Schreier an und definieren die (eventuell unendliche) Länge eines Moduls. Wir stellen fest, daß Moduln über perfekten ⁺) Ringen aufsteigende Kompositionsketten und eine Länge besitzen.

⁺) Die Angabe einer Ring-Eigenschaft ohne Seitennennung soll bedeuten, daß der Ring diese Eigenschaft beidseitig hat.

In §2 wenden wir uns dann der Frage zu, über welchen Ringen jeder reflexive Modul endlich erzeugt ist (wir nennen diese Ringe RE-Ringe). Dazu beweisen wir in Satz 2.3, daß Moduln M über perfekten S-Ringen die Eigenschaft $\text{Länge}(M^*) > \text{Länge}(M)$ haben, wenn nur die Länge von M genügend groß ist. Ähnlich wie im Fall eines unendlich-dimensionalen Vektorraumes schließen wir weiter, daß M nicht reflexiv sein kann. Für das Vorgehen im Beweis und im weiteren scheinen perfekte Ringe wie geschaffen, ihre typischen Eigenschaften werden voll ausgenutzt. Als Folgerung ergibt sich unter anderem, daß jeder artinsche S-Ring, also insbesondere jeder kommutative artinsche Ring RE-Ring ist.

In §2 taucht die obligatorische Frage auf, ob es überhaupt perfekte Ringe gibt, die nicht RE-Ringe sind. Diese Frage wird in §3 positiv beantwortet. Als Hilfsmittel dient ein allgemeines Verfahren zur Konstruktion reflexiver Moduln. Dieses Verfahren ist auch für sich von Interesse, da es dazu dient, den Beispielvorrat von reflexiven nicht endlich erzeugten Moduln zu vergrößern, von denen die Literatur bisher nur sehr wenige kennt.

In §4 wird für gewisse semi-primäre Ringe vom Nilpotenzgrad 2 die Klasse aller reflexiven Moduln beschrieben. Als Anwendung der erzielten Ergebnisse beantworten wir die Frage von F. Kasch, ob $\text{Hom}_R(-, R)$ nur dann reflexive Moduln

reflektiert, wenn R Kogeneratorring ist.

Während Dualitätseigenschaften von endlich erzeugten Moduln über QF-Ringen seit langem bekannt sind (siehe Dieudonné [5]), wurden Moduln ohne Endlichkeitsbedingungen bisher fast nicht behandelt. In §5 geben wir einen Zusammenhang zwischen den Faktoren der absteigenden Loewy-Kette eines Moduls M_R mit den Faktoren der aufsteigenden Loewy-Kette von ${}_R M^*$. Ergebnisse von Fleury [7] werden dadurch stark verallgemeinert. In Folgerung 5.5 zeigen wir, daß nicht endlich erzeugte Moduln über QF-Ringen ganz ähnliche Dualitätseigenschaften haben wie unendlich-dimensionale Vektorräume, indem wir (unendliche) aufsteigende Kompositionsketten von M_R und ${}_R M^*$ vergleichen.

§6 macht Aussagen über die Erhaltung von Dualitätseigenschaften bei Morita-Äquivalenzen. Insbesondere wird gezeigt: Reflexivität, Torsionslosigkeit und Vollheit sowie die Eigenschaft eines Ringes, RE-Ring zu sein, sind morita-invariant. Wir werden einige der in diesem Abschnitt erzielten Resultate als Hilfsmittel in §7 benötigen.

Sei $A \subset B$ eine Frobenius-Erweiterung im Sinne von Kasch [12], und bezeichne $\text{Res} : \text{Mod-}B \ni M_B \longrightarrow M_A \in \text{Mod-}A$ bzw. $\text{Ind} : \text{Mod-}A \ni N_A \longrightarrow N \otimes_A B \in \text{Mod-}B$ den Restriktions- bzw. Induktionsfunktoren. Wir zeigen in §7 unter anderem: Res und,

sofern B_A Generator ist, auch Ind , erhalten und reflektieren reflexive (bzw. torsionslose, bzw. volle) Moduln. Damit werden wohlbekannte Eigenschaften von Frobeniusalgebren verallgemeinert.

Herrn Prof. Dr. F. Kasch möchte ich Dank sagen für Anregungen zu dieser Arbeit und für das mir geschenkte Vertrauen.

§1. UNENDLICHE KOMPOSITIONSKETTEN; DIE LÄNGE VON MODULN

Wir definieren eine aufsteigende (bzw. absteigende) Kompositionskette eines Moduls M als ordnungstreue (bzw. ordnungsumkehrende) Abbildung von einer Ordinalzahl in den Untermodulverband von M , die gewissen zusätzlichen Bedingungen genügt (Def. 1.1) ⁺).

Anschließend kennzeichnen wir Moduln, die aufsteigende bzw. absteigende Kompositionsketten besitzen, durch ihre Eigenschaft, halbartinsch bzw. halbnoethersch zu sein. (M heißt halbartinsch, wenn jeder von 0 verschiedene Faktormodul von M einen einfachen Untermodul besitzt. M heißt halbnoethersch, wenn jeder von 0 verschiedene Untermodul von M einen maximalen Untermodul besitzt.) Wir stellen fest, daß insbesondere Moduln über perfekten Ringen Kompositionsketten besitzen.

Weiter zeigen wir, daß - wie im endlichen Fall - je zwei aufsteigende Kompositionsketten "isomorph" sind (Satz 1.9). Für absteigende Kompositionsketten ist das nicht wahr, was seine Ursache im Fehlen der "dualen Grothendieck-Bedingung" hat. Wir führen den Beweis von 1.9 aber so, daß sich auch ein Vergleich einer aufsteigenden mit einer absteigenden Kompositionskette eines Moduls ergibt (Satz 1.13).

⁺) Wir folgen mit dieser Definition und einigen weiteren Aussagen in diesem Abschnitt Schenkman [24], der unendliche Kompositionsketten von Gruppen eingeführt hat.

Folgerung 1.12 wird wesentlich im Beweis von Satz 2.3 verwendet werden.

In Satz 1.15 geben wir eine Abschätzung für die absteigende Loewy-Länge des Endomorphismenringes gewisser halbartinischer Moduln, die eine bekannte Aussage über den Nilpotenzgrad des Endomorphismenringes von Moduln endlicher Länge verallgemeinert (siehe Bourbaki [4] §2, n^0 , ex.3).

Ist α eine Ordinalzahl, so bezeichnen wir ihren Nachfolger $\alpha \cup \{\alpha\}$ mit α^+ . Ist α Nichtlimeszahl, so wird ihr Vorgänger α^- genannt.

1.1 Definition Seien M ein Modul, α, β Ordinalzahlen und $\mathcal{V}(M)$ der Untermodulverband von M .

(1) Ein Tripel (X, α, M) heißt aufsteigende Kette in M , wenn gilt:

- (a) $X : \alpha^+ \longrightarrow \mathcal{V}(M)$ ist eine Abbildung
- (b) $\forall i, j \in \alpha^+ : i < j \Rightarrow X_i \subset X_j$ ⁺

Eine aufsteigende Kette (X, α, M) heißt aufsteigende Kompositionskette von M , wenn gilt:

- (c) $X_0 = 0$, $X_\alpha = M$
- (d) $\forall i \in \alpha : X_{i^+} / X_i$ einfach
- (e) $\forall l \in \alpha^+ : l \text{ Limeszahl} \Rightarrow X_l = \bigcup_{i < l} X_i$

(2) Ein Tripel (Y, β, M) heißt absteigende Kette in M , wenn gilt:

⁺) Mit X_i oder $X(i)$ wird der Wert von X an der Stelle i bezeichnet.

(a) $\gamma : \beta^+ \longrightarrow \mathcal{V}(M)$ ist eine Abbildung

(b) $\forall i, j \in \beta^+ : i < j \Rightarrow \gamma_j \subseteq \gamma_i$

Eine absteigende Kette (γ, β, M) heißt absteigende Kompositions-kette von M , wenn gilt:

(c) $\gamma_0 = M$, $\gamma_\beta = 0$

(d) $\forall i \in \beta : \gamma_i / \gamma_{i+}$ einfach

(e) $\forall l \in \beta^+ : l \text{ Limeszahl} \Rightarrow \gamma_l = \bigcap_{i < l} \gamma_i$

(3) Die aufsteigende (absteigende) Kette (X', α', M) heißt Verfeinerung der aufsteigenden (absteigenden) Kette (X, α, M) , wenn gilt:

$\forall i \in \alpha \exists i' \in \alpha' : X_i = X'_{i'}$

1.2 Bemerkung Gelegentlich wird statt (X, α, M) auch

$\{X_i\}_{i \in \alpha^+}$ mit der natürlichen Ordnung als Kette bezeichnet.

1.3 Satz Für einen Modul M sind äquivalent:

(i) M ist halbartinsch

(ii) M besitzt eine aufsteigende Kompositions-kette

(iii) Jede aufsteigende Kette (f, α, M) , für die f eine injektive Abbildung ist, besitzt eine Verfeinerung, die aufsteigende Kompositions-kette von M ist.

Beweis. Sei $U \subseteq M$. Bekanntlich ist M genau dann halbartinsch, wenn U und M/U halbartinsch sind.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $\mathcal{F} = \{(f, \alpha, U) \mid U \subseteq M \text{ und } (f, \alpha, U) \text{ ist}$

aufsteigende Kompositionskette von $U\}$. $\mathcal{F}$ ist geordnet

vermöge $(f_1, \alpha_1, U_1) \leq (f_2, \alpha_2, U_2) : \Leftrightarrow$

$\alpha_1 \leq \alpha_2$ und $\forall i \in \alpha_1^+ : f_1(i) = f_2(i)$.

Man zeigt leicht, daß $(\mathcal{F}, \leq)$ induktiv geordnet ist. Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element

(f_0, α_0, U_0) von $\mathcal{F}$. Annahme: $U_0 \neq M$. Dann hat der halb-
artinsche Modul M/U_0 einen einfachen Untermodul E/U_0 .

Mit Hilfe von E erhält man sofort ein Element aus $\mathcal{F}$,
das (f_0, α_0, U_0) echt umfaßt, Widerspruch.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $U \subsetneq M$ und $\{X_i\}_{i \in \alpha^+}$ eine aufsteigende
Kompositionskette von M .

Sei $j := \min \{j' \in \alpha^+ \mid U \subsetneq X_{j'} + U\}$. j ist keine Limes-
zahl. Dann wäre nämlich für alle $k < j$ $X_k \subset U$, also

$X_j = \bigcup_{k < j} X_k \subset U$, Widerspruch.

Wegen $X_j^- \subset X_j \cap U \subset X_j$ folgt nun $X_j + U / U \cong$

$X_j / X_j \cap U = X_j / X_j^-$ einfach, also $\text{So}(M/U) \neq 0$, was
zu zeigen war.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei (f, α, M) eine aufsteigende Kette in
 M und f injektiv. Für $i \in \alpha$ ist $f(i^+)/f(i)$ halbartinisch.

Seien $(g_i, \alpha_i, f(i^+)/f(i))$ aufsteigende Kompositionsketten.

Sei $A := \{(i, j_i) \mid i \in \alpha \text{ und } j_i \in \alpha_i\}$. A ist wohlgeord-

net vermöge $(i, j_i) \leq (i', j'_{i'}) : \Leftrightarrow i < i'$ oder $[i = i'$

und $j_i \leq j'_{i'}]$. A definiert eine Ordinalzahl $\tilde{A}$, deren

Elemente wir mit denen von A identifizieren. Definiere nun

$F : \tilde{A}^+ \longrightarrow \mathcal{V}(M)$ durch

$F((i, j_i)) := \nu_i^{-1}(g_i(j_i))$, wobei $\nu_i : M \longrightarrow M/f(i)$ der

natürliche Epimorphismus ist, sowie

$$F(\tilde{A}) := M.$$

Aus der Konstruktion von F folgt, daß $(F, \tilde{A}, M)$ eine aufsteigende Kompositionskette von M ist.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) trivial.

1.4 Satz (1) Für einen Modul M sind äquivalent:

(i) M ist halbnoethersch

(ii) M besitzt eine absteigende Kompositionskette

(2) Genau dann ist jeder Faktormodul von M halbnoethersch, wenn es zu jeder absteigenden Kette (f, β, M) mit injektiver Abbildung f eine Verfeinerung gibt, die absteigende Kompositionskette von M ist.

Beweis analog 1.3.

1.5 Bemerkung Da Faktormoduln von halbnoetherschen Moduln im allgemeinen nicht halbnoethersch sind, läßt sich 1.4 nicht analog zu 1.3 formulieren (siehe Beispiele 1.8).

1.6 Beispiele (1) Artinsche oder halbeinfache (noethersche oder radikalfreie) Moduln besitzen aufsteigende (absteigende) Kompositionsketten.

(2) Links- (Rechts-) moduln über rechts perfekten Ringen besitzen aufsteigende (absteigende) Kompositionsketten.

(3) A_2 besitzt genau dann eine aufsteigende Kompositions-

kette, wenn A_2 torsionsvoll ist.

(4) A_2 besitzt genau dann eine absteigende Kompositionskette, wenn der teilbare Anteil von A_2 0 ist.

(Wir verzichten auf die Beweise.)

1.7 Folgerungen (1) Direkte Summen und direkte Produkte von halbnoetherschen Moduln sind halbnoethersch.

(2) Direkte Summen von halbartinschen Moduln sind halbartinsch.

(3) Direkte Produkte von halbartinschen Moduln sind im allgemeinen nicht halbartinsch.

Beweis. (1) Sei $M = \coprod_{i \in I} M_i$ (bzw. $M = \prod_{i \in I} M_i$) und I wohlgeordnet. Man verfeinere in naheliegender Weise die Kette $\{ \coprod_{j \in I, i < j} M_j \}_{i \in I}$ (bzw. $\{ \prod_{j \in I, i < j} M_j \}_{i \in I}$) zu einer absteigenden Kompositionskette von M .

(2) Sei $M = \coprod_{i \in I} M_i$ und I wohlgeordnet. Man verfeinere $\{ \coprod_{j \in I, j < i} M_j \}_{i \in I}$ zu einer aufsteigenden Kompositionskette von M .

(3) siehe Beispiel 1.8(1).

1.8 Beispiele (1) $\prod_{p \text{ Primzahl}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist nicht halbartinsch, denn sein Faktormodul nach $\prod_{p \text{ Primzahl}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ hat keinen einfachen Untermodul.

(2) $\prod_{p \text{ Primzahl}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist halbnoethersch, aber sein Faktormodul nach $\prod_{p \text{ Primzahl}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ nicht.

(3) Seien K ein Körper und R der Ring der spaltenendlichen Matrizen aus $K^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, der aus den echten oberen Dreiecksmatrizen und den Körpervielfachen der Einheitsmatrix besteht. R ist rechts, aber nicht links perfekt (siehe Bass [2], p. 476). R^R ist halbnoethersch, denn die absteigende Kette $R \supset Ra(R) \supset Ra^2(R) \supset \dots \supset 0$ hat halbeinfache Faktoren, läßt sich also zu einer absteigenden Kompositionskette verfeinern. $R^{R^{(\mathbb{N})}}$ ist nach 1.7(1) halbnoethersch. Es gibt $U \subsetneq R^{R^{(\mathbb{N})}}$, so daß U in keinem maximalen Untermodul von $R^{R^{(\mathbb{N})}}$ enthalten ist (andernfalls wäre R nach Kasch [13], 11.3.5 und 11.6.2, links perfekt). $R^{(R^{(\mathbb{N})})}/U$ ist nicht halbnoethersch.

1.9 Satz Seien (X, α, M) und (Y, β, M) aufsteigende Kompositionsketten von M . Dann gibt es eine Bijektion

$$\nu: \beta \longrightarrow \alpha \quad \text{mit} \quad \forall j \in \beta: \quad Y_{j^+}/Y_j \cong X_{\nu(j)^+}/X_{\nu(j)}.$$

Beweis. Seien $N(\beta)$ bzw. $N(\alpha)$ die Mengen der Nachfolger der Elemente in β bzw. α .

$\tilde{\nu}: N(\beta) \longrightarrow N(\alpha)$ wird definiert durch

$$\tilde{\nu}(j^+) := \min \{ k \in \alpha^+ \mid Y_{j^+} \subsetneq X_k + Y_j \} \quad (j \in \beta).$$

$\tilde{\nu}$ ist wohldefiniert: das Minimum existiert, da α^+ wohlgeordnet ist (dieser Schluß motiviert die Indizierung von

Untermoduln mit Ordinalzahlen in Def. 1.1); wir nehmen jetzt an, $\tilde{\nu}(j^+)$ wäre keine Nachfolgerzahl. Sei $Y_{j^+} = yR + Y_j$.

Dann wäre $y \in X_{\tilde{\nu}(j^+)} + Y_j = \bigcup_{i < \tilde{\nu}(j^+)} X_i + Y_j =$

$\bigcup_{i < \tilde{\nu}(j^+)} (X_i + Y_j)$ (Grothendieck-Bedingung), also gäbe es bereits ein $k < \tilde{\nu}(j^+)$ mit $y \in X_k + Y_j$ und damit $Y_{j^+} \subset X_k + Y_j$, Widerspruch zur Minimalität von $\tilde{\nu}(j^+)$.

Mit der Definition von $\tilde{\nu}$ zeigt man für alle $i \in \alpha$:

$$\begin{aligned} i = \tilde{\nu}(j^+) & \iff \\ X_{i^-} + Y_j & \neq X_i + Y_j \text{ und } X_{i^-} + Y_{j^+} = X_i + Y_j \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} i = \tilde{\nu}(j^+) & \iff \\ X_{i^-} + Y_j & \neq X_i + Y_j \end{aligned}} \right\} (*)$$

Beh.: $\forall j \in \beta : Y_{j^+}/Y_j \cong X_{\tilde{\nu}(j^+)} / X_{\tilde{\nu}(j^+)^-}$.

Bew.: Nach (*) ist $\frac{X_{\tilde{\nu}(j^+)}}{X_{\tilde{\nu}(j^+)^-}} \cong \frac{X_{\tilde{\nu}(j^+)} + Y_j}{X_{\tilde{\nu}(j^+)^-} + Y_j} =$

$$\begin{aligned} \frac{X_{\tilde{\nu}(j^+)^-} + Y_j + Y_{j^+}}{X_{\tilde{\nu}(j^+)^-} + Y_j} & \cong \frac{Y_{j^+}}{(X_{\tilde{\nu}(j^+)^-} + Y_j) \cap Y_{j^+}} \cong \\ & \frac{Y_{j^+} / Y_j}{(X_{\tilde{\nu}(j^+)^-} + Y_j) \cap Y_{j^+} / Y_j} . \end{aligned}$$

Da $\frac{X_{\tilde{\nu}(j^+)}}{X_{\tilde{\nu}(j^+)^-}}$ und $\frac{Y_{j^+}}{Y_j}$ einfach sind, folgt die Behauptung.

Beh.: $\tilde{\nu}$ ist injektiv.

Bew.: Seien $j_1^+ < j_2^+$ aus $N(\beta)$. Wegen (*) gilt

$$X_{\tilde{\nu}(j_1^+)^-} + Y_{j_1^+} = X_{\tilde{\nu}(j_1^+)} + Y_{j_1}, \text{ und}$$

$Y_{j_1} \subset Y_{j_1^+} \subset Y_{j_2}$ liefert die Gleichung

$$X_{\tilde{\nu}(j_1^+)^-} + Y_{j_2} = X_{\tilde{\nu}(j_1^+)} + Y_{j_2} . \text{ Durch erneute Anwendung von (*) erhält man } \tilde{\nu}(j_1^+) \neq \tilde{\nu}(j_2^+) .$$

Beh.: $\tilde{\nu}$ ist surjektiv.

Bew.: Sei $i^+ \in N(\alpha)$ und $\tilde{\mu}(i^+) := \min \{ k \in \beta^+ \mid X_{i^+} \subset Y_k + X_i \}$. Dann ist $\tilde{\nu}(\tilde{\mu}(i^+)) = i^+$ leicht nachzurechnen.

Die gesuchte Bijektion $\nu : \beta \longrightarrow \alpha$ erhält man nun durch

$$\nu(j) := \tilde{\nu}(j^+)^- .$$

1.10 Bemerkungen (1) Ist α endlich, so erhält man aus 1.9 den Satz von Jordan-Hölder-Schreier.

(2) In 1.9 sind α und β im allgemeinen verschieden. Limeszahlen werden von ν im allgemeinen nicht erhalten.

1.11 Definition Sei M halbartinsch und (X, α, M) eine aufsteigende Kompositionskette.

Länge von M : $\text{Lä}(M) := |\alpha|$.

1.12 Folgerungen Sei I eine Menge, seien $M, \{M_i\}_{i \in I}$ halbartinsche Moduln.

$$(1) \quad U \subset M \Rightarrow \text{Lä}(U) + \text{Lä}(M/U) = \text{Lä}(M)$$

$$(2) \quad \text{Lä}\left(\bigsqcup_{i \in I} M_i\right) = \sum_{i \in I} \text{Lä}(M_i)$$

$$(3) \quad \text{Lä}(M^{(I)}) = |I| \cdot \text{Lä}(M)$$

Die Beweise folgen aus 1.3, 1.7 und 1.9.

Satz 1.9 läßt sich nicht entsprechend für absteigende Kompositionsketten formulieren. So gibt es in $\mathbb{Z}$ Ketten, in denen zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p Primzahl) isomorphe Faktoren mit beliebiger Vielfachheit $\leq |N|$ auftreten. Es gilt aber

1.13 Satz Sei M halbnoethersch und halbartinsch, seien (Y, β, M) eine absteigende und (X, α, M) eine aufsteigende Kompositionskette von M . Dann gibt es eine injektive Abbildung $\nu: \beta \longrightarrow \alpha$ mit der Eigenschaft

$$\forall j \in \beta : Y_j / Y_{j+} \cong X_{\nu(j)+} / X_{\nu(j)} .$$

Beweis. Sei $\hat{\nu}(j) := \min \{k \in \alpha^+ \mid Y_j \subset X_k + Y_{j+}\}$. Dem Beweis von 1.9 folgend, zeigt man: $\hat{\nu}$ ist wohldefiniert, $\hat{\nu}(j)$ ist Nachfolgerzahl, $Y_j / Y_{j+} \cong X_{\hat{\nu}(j)} / X_{\hat{\nu}(j)-}$, und $\hat{\nu}$ ist injektiv. Die Abbildung $\nu : \beta \ni j \longmapsto \hat{\nu}(j) \in \alpha$ hat dann die gesuchte Eigenschaft.

1.14 Bemerkung In 1.13 gilt im allgemeinen $|\beta| < |\alpha|$. Man wähle zum Beispiel $M = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{Q}^{(\mathbb{R})}_{\mathbb{Z}}$.

$\{i \in \mathbb{N}, j \leq i \} \mathbb{Q}_{(i)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ bzw. $\{k \in \mathbb{R}, l \leq k \} \mathbb{Q}_{(k)}\}_{l \in \mathbb{R}}$ bilden absteigende Kompositionsketten, deren zugehörige Ordinalzahlen die Kardinalität $|\mathbb{N}|$ bzw. $|\mathbb{R}|$ haben. Es stellt sich die Frage, ob in einem halbartinischen und halbnoetherschen Modul stets eine absteigende Kompositionskette existiert, die "isomorph" zu einer aufsteigenden Kompositionskette ist. Für Moduln mit endlicher aufsteigender Loewy-Länge ist das der Fall (man erhält die absteigende Kompositionskette als Verfeinerung der aufsteigenden Loewy-Kette von M). Im allgemeinen Fall ist die Antwort unbekannt.

Sei σ eine Ordinalzahl. Das σ -te Glied $\text{Ra}^{\sigma}(M)$ der absteigenden Loewy-Kette eines Moduls M ist gegeben durch

$$\begin{cases} M, & \text{falls } \sigma = 0 \\ \text{Ra}(\text{Ra}^{\sigma-1}(M)), & \text{falls } \sigma \text{ keine Limeszahl ist} \\ \bigcap_{\tau < \sigma} \text{Ra}^{\tau}(M), & \text{falls } \sigma \text{ eine Limeszahl ist.} \end{cases}$$

Das σ -te Glied $\text{So}^\sigma(M)$ der aufsteigenden Loewy-Kette von M ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ falls } \sigma = 0 \\ \nu^{-1} \text{So}(\nu(M)), \quad \nu: M \longrightarrow M/\text{So}^{\sigma^-}(M) \text{ der nat\"urliche} \\ \quad \text{Epimorphismus, falls keine Limeszahl ist} \\ \bigcup_{\tau < \sigma} \text{So}^\tau(M), \text{ falls } \sigma \text{ eine Limeszahl ist.} \end{array} \right.$$

Der folgende Satz verallgemeinert die Aussage, da\B der Nilpotenzgrad des Endomorphismenringes eines Moduls endlicher Länge durch $\text{L}(M)$ beschränkt ist.

1.15 Satz Seien M_R halbartinsch und jeder Faktormodul von M_R halbnnoethersch. Seien $S = \text{End}(M_R)$ ein links perfekter Ring und μ die absteigende Loewy-Länge von ${}_S S$. Dann ist $|\mu| \leq \text{L}(M_R)$.

Beweis. Betrachte $\{\text{Ra}^\sigma({}_S S)\}_{\sigma \in \mu^+}$, die absteigende Loewy-Kette von ${}_S S$.

$\{\text{Ra}^\sigma({}_S S) \cdot M\}_{\sigma \in \mu^+}$ ist dann eine absteigende Kette in ${}_S M$ und M_R , und es gilt $\text{Ra}^\sigma({}_S S) \cdot M = 0 \iff \text{Ra}^\sigma({}_S S) = 0$ wegen ${}_S M$ treu; ferner gilt $\text{Ra}^\sigma({}_S S) \cdot M = \text{Ra}^\tau({}_S S) \cdot M \iff \sigma = \tau$ wegen

$\text{Ra}^{\sigma^+}({}_S S) \cdot M = \text{Ra}(S) \cdot \text{Ra}^\sigma({}_S S) \cdot M = \text{Ra}(\text{Ra}^\sigma({}_S S) \cdot M) \subsetneq \text{Ra}^\sigma({}_S S) \cdot M$ für alle σ .

Verfeinere diese absteigende Kette nach 1.4 zu einer absteigenden Kompositionskette (Y, β, M) von M_R . Dann gilt

$|\mu| \leq |\beta|$. Nach 1.13 ist $|\beta| \leq \text{Lä}(M_R)$, daraus folgt die Behauptung.

1.15 läßt sich zum Beispiel dann anwenden, wenn M_R ein endlich präsentierbarer Modul über einem perfekten Ring ist. Nach Björk [3] , Theorem 4.2, ist dann nämlich S links perfekt.

§2. RINGE, DEREN REFLEXIVE MODULN ENDLICH ERZEUGT SIND

2.1 Definition Ein Ring R heißt Rechts-RE-Ring, wenn jeder reflexive R -Rechtsmodul endlich erzeugt ist.

Zur Klasse der RE-Ringe gehören offenbar die Körper und nach Schneider [25], Satz 3.1, die QF-Ringe. Wir zeigen, daß es weitere RE-Ringe gibt. Wichtigstes Hilfsmittel ist dabei Satz 2.3, den man so lesen kann, daß für einen Modul M über einem perfekten S-Ring $\text{Lä}(M^*) > \text{Lä}(M)$ gilt, wenn nur $\text{Lä}(M)$ genügend groß ist. (Der Ring R heißt Rechts-S-Ring, wenn jeder einfache R -Rechtsmodul bis auf Isomorphie in $\text{So}(R_R)$ enthalten ist.) Daraus folgern wir: Jeder perfekte S-Ring R mit $\text{Lä}(R_R) + \text{Lä}({}_R R) \leq |\mathbb{N}|$ (insbesondere jeder artinsche S-Ring, also z.B. jeder kommutative oder lokale artinsche Ring) ist RE-Ring.

Die Voraussetzung "S-Ring" ist nicht notwendig; wir zeigen in Satz 2.6, daß jeder PDS-Ring RE-Ring ist und zitieren in 2.7(1) ein Beispiel eines (notwendig artinschen) PDS-Ringes, der nicht S-Ring ist.

Außerdem gehen wir der Frage nach, für welche Ringe R jede unendliche direkte Summe von 0 verschiedener R -Moduln nicht reflexiv ist und ergänzen einige Ergebnisse von Schneider [25].

Im folgenden sind $\alpha, \beta, \dots$ Kardinalzahlen.

2.2 Definition M_R heißt streng β -erzeugt, wenn M_R ein Erzeugendensystem der Kardinalität β besitzt, aber keines mit Kardinalität kleiner als β .

2.3 Satz Sei R perfekter Rechts-S-Ring und sei $\text{Lä}(R) \leq \alpha$.
Seien M_R streng β -erzeugt und $\beta \geq \alpha + |\mathbb{N}|$.
Dann ist M_R^* streng γ -erzeugt mit $\gamma \geq 2^\beta$.

Beweis. Mit M ist auch $M/\text{Ra}(M)$ streng β -erzeugt, also $M/\text{Ra}(M) = \bigoplus_{i \in I} E_i$, E_i einfache R -Rechtsmoduln, $|I| = \beta$.
 $\text{Ra}(M)^0 := \{f \in M^* \mid f(\text{Ra}(M)) = 0\}$ ist ein Untermodul von M^* , und es gilt $\text{Ra}(M)^0 \cong (M/\text{Ra}(M))^* \cong \prod_{i \in I} E_i^*$.

Da R rechts perfekter S-Ring ist, gilt für alle $i \in I$ $\text{So}(E_i^*) \neq 0$.

Zu jedem $i \in I$ wähle man einen einfachen Untermodul $A_i \hookrightarrow E_i^*$.
Da es nur endlich viele Isomorphieklassen einfacher R -Linksmoduln gibt, existieren ein einfacher R -Linksmodul A und eine Teilmenge $I' \subset I$, $|I'| = |I|$, so daß für alle $i \in I'$ $A_i \cong A$ gilt. Also ist $A^{I'}$ bis auf Isomorphie in $\text{So}(M^*)$ enthalten.

Da $A^{I'}$ links von $\text{Ra}(R)$ annulliert wird, ist es halbeinfach, und es gibt eine Menge J mit $A^{I'} \cong A^{(J)}$. Beide Moduln sind nach dem Satz von Wedderburn Linksvektorräume über $K := \text{End}(A)$, und $\dim_K A$ ist endlich.

Daraus folgt $K^{I'} \cong K^{(J)}$ (Linksvektorraum-Isomorphismus).

Wir wenden nun folgenden Satz von Erdős und Kaplansky an:

Ist K ein Schiefkörper und I eine unendliche Menge, so gilt $\dim_K K^I = |K| |I|$.

Dieser Satz liefert die Abschätzung

$$2^{|I|} \leq |K| |I| = \dim_K K^I = \dim_K K^{(J)} = |J|.$$

Daraus folgt: $\text{Lä}(\text{So}(M^*)) \geq |J| \geq 2^\beta$.

Annahme: ${}_R M^*$ ist γ' -erzeugt mit $\gamma' < 2^\beta$.

Dann erhielte man durch mehrmalige Anwendung von 1.12

$$\text{Lä}(\text{So}(M^*)) \leq \text{Lä}(M^*) \leq \alpha \cdot \gamma' < 2^\beta. \text{ Widerspruch.}$$

2.4 Folgerungen Sei R perfekter S -Ring und $\text{Lä}(R_R) + \text{Lä}({}_R R) \leq \alpha$. Seien M_R streng β -erzeugt und $\beta \geq \alpha + |N|$.

- (1) M_R^{**} ist streng δ -erzeugt mit $\delta \geq 2^{2^\beta}$
- (2) Es gibt keinen Epimorphismus $M_R \longrightarrow M_R^{**}$
- (3) M ist nicht reflexiv

Beweis durch doppelte Anwendung von 2.3. (Teil (2) ist eine starke Verallgemeinerung von 3.25 bei Schneider [25].)

2.5 Folgerungen (1) Sei R ein perfekter S -Ring mit $\text{Lä}(R_R) + \text{Lä}({}_R R) \leq |N|$. Dann ist R ein RE-Ring.

- (2) Jeder artinsche S -Ring ist RE-Ring
- (3) Jeder lokale artinsche Ring ist RE-Ring
- (4) Jeder kommutative artinsche Ring ist RE-Ring

Beweis. (1) Dies ist der Spezialfall von 2.4(3) für $\alpha = |N|$. (Damit wird Satz 3.1 von Schneider [25] verallgemeinert.)

(2), (3) und (4) folgen sofort aus (1).

Wir zeigen nun, daß die Voraussetzung "S-Ring" in 2.5 keine notwendige Bedingung ist.

Ringe, über denen jede reine exakte Folge von R -Rechtsmoduln zerfällt, heißen nach Fieldhouse [6] Rechts-PDS-Ringe. Sie sind nach Zimmermann [26] durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß jeder R -Rechtsmodul M_R direkte Summe von direkt unzerlegbaren Moduln endlicher Länge ist. Zum Beispiel ist jeder einreihige artinsche Ring PDS-Ring.

Es ist bekannt, daß Rechts-PDS-Ringe rechts artinsch, also rechts linear-kompakt sind. Damit sind sie nach Zimmermann [27] links rein injektiv.

2.6 Satz Jeder Rechts-PDS-Ring ist Rechts-RE-Ring.

Beweis. Sei M_R ein nicht endlich erzeugter R -Rechtsmodul, $M = \coprod_{i \in I} M_i$ (I unendlich, für alle $i \in I$ $M_i \neq 0$).

Annahme: M ist reflexiv.

$$s : \prod_{i \in I} M_i^* \ni (f_i)_{i \in I} \longmapsto \left((m_i)_{i \in I} \longmapsto \sum_{i \in I, f_i(m_i) \neq 0} f_i(m_i) \right) \in M^*$$

ist ein Isomorphismus. Mit M sind auch M_i , $i \in I$, reflexiv.

Wegen $M_i^{**} \cong M_i \neq 0$ gibt es $0 \neq \mu_i \in \text{Hom}_R(M_i^*, .R)$.

R^R ist rein injektiv, und die Inklusion der direkten Summe in das direkte Produkt ist rein, also gibt es $\mu \in (\prod_{i \in I} M_i^*)^*$, so daß das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccccc}
 \prod M_i^* & \xrightarrow{\quad} & \prod M_i^* & \xrightarrow{s} & M^* \\
 \downarrow \mu_i & & \swarrow \mu & & \\
 R & & & &
 \end{array}$$

$s^{-1}\mu$ *) liegt nicht in $\text{Bi}(\Phi_M)$, denn es gibt nach Konstruktion von μ $(f_i)_{i \in I} \in \prod M_i^*$ derart, daß $\mu = ss^{-1}\mu$ auf allen Komponenten von $(f_i)_{i \in I}$ von 0 verschiedene Werte annimmt. Für alle $m \in M$ hat aber $s \Phi_M(m)$ auf fast allen Komponenten von $(f_i)_{i \in I}$ den Wert 0. Daher ist Φ_M nicht surjektiv, Widerspruch.

2.7 Bemerkung und Beispiele

(1) Für Ringe R , die den Voraussetzungen von 2.5(1) oder 2.6 genügen, gilt nach dem Bewiesenen sogar: Jeder volle R -Modul ist endlich erzeugt.

(2) Sei K ein Körper und $R := \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$. Dann ist R ein PDS-Ring (siehe Anderson und Fuller [1], ex. 29.5), genügt aber nicht den Voraussetzungen von 2.5, denn R ist kein S-Ring.

(3) Sei K ein Körper und $R := K[X_i]_{i \in \mathbb{N}} / (\{X_i X_j\}_{i, j \in \mathbb{N}})$. Dann genügt R den Voraussetzungen von 2.5, ist aber kein

*) Homomorphismen von Rechts- (Links-) moduln stehen links (rechts) vom Argument. Danach richtet sich die Schreibweise ihrer Verknüpfungen.

PDS-Ring, denn R ist nicht artinsch.

2.8 Hilfssatz Seien R ein semi-lokaler Ring mit der Eigenschaft $\text{So}(R_R) = \text{So}({}_R R)$ und M_R ein R -Rechtsmodul.

Dann ist

$\alpha : \text{So}(M^*) \ni f \longmapsto (m + \text{Ra}(M) \longmapsto f(m)) \in (M/\text{Ra}(M))^*$
ein R -Linksmodul-Isomorphismus.

Beweis. Wir bemerken zuerst, daß für einen Rechtsmodul X_R über einem semi-lokalen Ring R folgende Aussage gilt:

Für jedes $x \in X$ ist $x \in \text{So}(X_R)$ genau dann, wenn $x \cdot \text{Ra}(R) = 0$.
(analog für R -Linksmoduln)

Sei jetzt $\text{Ra}(M)^0 = \{f \in M^* \mid f(\text{Ra}(M)) = 0\}$. Dann gilt
 $f \in \text{Ra}(M)^0 \iff f(\text{Ra}(M)) = f(M \cdot \text{Ra}(R)) = f(M) \cdot \text{Ra}(R) = 0 \iff$
 $f(M) \subseteq {}_R \text{Ra}(R) = \text{So}(R_R) \iff f(M) \subseteq r_R(\text{Ra}(R)) = \text{So}({}_R R) \iff$
 $\text{Ra}(R) \cdot f(M) = (\text{Ra}(R) \cdot f)(M) = 0 \iff \text{Ra}(R) \cdot f = 0 \iff f \in \text{So}(M^*)$.
(Dabei bezeichnet ${}_R(-)$ bzw. $r_R(-)$ den Links- bzw. Rechts-Annulator in R .)

Daraus folgt die Behauptung.

2.9 Bemerkung Die Voraussetzung $\text{So}(R_R) = \text{So}({}_R R)$ in 2.8 ist wesentlich. Betrachtet man zum Beispiel

$R = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$ (K Körper) und $M = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq R_R$, so ist

$\text{So}(M^*) \neq 0$, aber $(M/\text{Ra}(M))^* = 0$.

2.10 Satz Seien R ein rechts perfekter Ring mit ${}_R R$ injektiv und M_R ein R -Rechtsmodul.

(1) Ist der R -Linksmodul M^* reflexiv, so ist M endlich erzeugt.

(2) R ist ein Rechts-RE-Ring.

Beweis. (1) Es ist bekannt, daß unter den gegebenen Voraussetzungen ${}_R R$ Kogenerator und R S-Ring ist, und daß $\text{So}(R_R) = \text{So}({}_R R)$ gilt. Dann ist jede unendliche direkte Summe von 0 verschiedener R -Linksmoduln nicht reflexiv (siehe Satz 2.12(1)(b) bei Seitenvertauschung).

Da ${}_R R$ injektiver Kogenerator ist, sind bekanntlich Untermoduln reflexiver R -Linksmoduln reflexiv. Insbesondere ist $\text{So}(M^*) \subseteq M^*$ reflexiv, also von endlicher Länge. Nach 2.8 ist $M/\text{Ra}(M)$ von endlicher Länge.

Da $\text{Ra}(M)$ klein in M ist, folgt die Behauptung.

(2) Mit M ist stets auch M^* reflexiv (Kasch [13], 12.2.5). Aus (1) erhält man die Behauptung.

Die Bedeutung von 2.10 hängt davon ab, ob es einen rechts perfekten, links injektiven Ring gibt, der nicht bereits QF-Ring ist. Diese Frage ist offen (siehe Osofsky [22]). Der folgende Satz ist als teilweise Umkehrung von 2.5 aufzufassen.

2.11 Satz (1) R Rechts-RE-Ring und ${}_R R$ injektiver Kogenerator $\Rightarrow R$ QF-Ring

(2) R Rechts-RE-Ring und R_R injektiv $\Rightarrow R$ rechts kohärent

Beweis. (1) Jedes Rechtsideal von R ist reflexiv, also endlich erzeugt. Damit ist R_R noethersch.

(2) Sei A ein endlich erzeugtes Rechtsideal von R . Wir müssen zeigen, daß A endlich präsentierbar ist.

Aus der kurzen exakten Folge

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\iota} R^n \xrightarrow{\nu} A \longrightarrow 0$$

erhält man durch doppelte Anwendung des Hom-Funktors das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\iota} & R^n & \xrightarrow{\nu} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \Phi_B & & \downarrow \Phi_{R^n} & & \downarrow \Phi_A \\ 0 & \longrightarrow & B^{**} & \xrightarrow{\iota^{**}} & R^{n**} & \xrightarrow{\nu^{**}} & A^{**} \end{array},$$

dessen untere Zeile wegen R_R injektiv exakt ist. Φ_B ist offenbar injektiv, aber auch surjektiv:

Sei $x \in B^{**}$, dann folgen nacheinander $\nu^{**} \iota^{**}(x) = 0$, $\Phi_A \nu \Phi_{R^n}^{-1} \iota^{**}(x) = 0$, wegen A torsionslos $\nu \Phi_{R^n}^{-1} \iota^{**}(x) = 0$. Also gibt es $b \in B$ mit $\iota(b) = \Phi_{R^n}^{-1} \iota^{**}(x)$. Jetzt ist $\Phi_B(b) = x$ leicht nachzurechnen.

Damit ist B reflexiv, also nach Voraussetzung endlich erzeugt, was zu zeigen war.

Der nächste Satz gibt Auskunft über die Frage, wann unend-

liche direkte Summen von 0 verschiedener Moduln nicht reflexiv sind.

2.12 Satz (1) Sei

- (a) ${}_R R$ rein injektiv - oder gelte
- (b) Für jeden von 0 verschiedenen R -Linksmodul X ist $X^* \neq 0$.

Dann ist jede unendliche direkte Summe von 0 verschiedener R -Rechtsmoduln nicht reflexiv.

(2) Ist R_R artinsch oder ${}_R R$ injektiv, so ist jede unendliche direkte Summe von 0 verschiedener R -Rechtsmoduln nicht reflexiv.

(3) Ist ${}_R R$ Kogenerator oder R links perfekter Links-S-Ring, so ist jede unendliche direkte Summe von 0 verschiedener R -Rechtsmoduln nicht reflexiv.

(4) Ist ${}_R R$ rein injektiv semi-perfekt oder R links perfekter Links-S-Ring, so ist jeder reflexive projektive R -Rechtsmodul endlich erzeugt.

Beweis. (1)(a) Der Beweis verläuft wie der von 2.6.

(b) Sei $M = \coprod_{i \in I} M_i$, I unendlich, für alle $i \in I$ $M_i \neq 0$, ein reflexiver R -Rechtsmodul. Dann sind für alle $i \in I$ M_i reflexiv, also $M_i^* \neq 0$. Nach Voraussetzung ist $(\prod_{i \in I} M_i^* / \coprod_{i \in I} M_i^*)^* \neq 0$. Dem Beweis von Osofsky [22], Lemma 13, folgend, erhält man einen Widerspruch.

(2) Ein rechts artinscher oder links injektiver Ring ist

links rein injektiv. (1)(a) anwenden.

(3) Folgt aus (1)(b).

(4) Jeder projektive Rechtsmodul über einem semi-perfekten Ring ist nach Müller [18], Theorem 3, bis auf Isomorphie direkte Summe von direkten Summanden von R_R . (1) anwenden.

Die Frage, ob ein Rechts-RE-Ring zugleich Links-RE-Ring ist, bleibt offen. Eine Teilantwort bietet

2.13 Satz Ist R links noetherscher Rechts-RE-Ring, so ist R Links-RE-Ring.

Beweis. Sei ${}_R X$ reflexiv. Dann ist X_R^* ebenfalls reflexiv, also existieren nach Voraussetzung $n \in \mathbb{N}$ und ein Epimorphismus $R^n \xrightarrow{\nu} X_R^*$. Dann ist ${}_R X \cong {}_R X^{**} \xrightarrow{\nu^*} {}_R R^n$ ein Monomorphismus und damit ${}_R X$ endlich erzeugt.

§3. EIN VERFAHREN ZUR KONSTRUKTION NICHT ENDLICH ERZEUGTER REFLEXIVER MODULN

Ist R ein beliebiger Ring, so ist jeder endlich erzeugte projektive R -Modul reflexiv. Weitere reflexive Moduln gibt es im allgemeinen nicht. (So sind die reflexiven Moduln der Ringe in 2.7(2),(3) genau die endlich erzeugten projektiven.)

Es sind bisher nur wenige Beispiele für nicht endlich erzeugte reflexive Moduln bekannt; dies sind im wesentlichen die abelschen Gruppen $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ und $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ (siehe Fuchs [8] , § 47) und die nicht endlich erzeugten Rechtsideale von nicht noetherschen injektiven Kogeneratorringen (siehe Osofsky [22] , ex. 1, oder Levy [15]).

Wir sind daran interessiert, weitere reflexive Moduln zu konstruieren. Dazu geben wir hier ein allgemeines Verfahren an. Dieses wird es uns ermöglichen, anschließend einen nicht endlich erzeugten reflexiven Modul über einem perfekten Ring zu finden.

3.1 Satz Seien R ein beliebiger Ring und M_R ein R -Rechtsmodul mit der Eigenschaft $M^* = 0$. Seien $S := \text{End}(M_R)$ und $\tilde{S} := \begin{pmatrix} S & S \\ 0 & S \end{pmatrix}$. Vermöge $\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix} \cdot m := w \cdot m$ ist M ein $\tilde{S}$ -Linksmodul. Definiere $A := \begin{pmatrix} \tilde{S} & M \\ 0 & R \end{pmatrix}$.

Dann ist $\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_A \hookrightarrow A_A$ ein reflexiver A -Rechtsmodul.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ein Annulator-

Rechtsideal ist, und daß jedes $f \in \text{Hom}_A(\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A.)$ zu

$f' \in \text{Hom}_A(A., A.)$ hochgehoben werden kann.

(1) Beh.: $\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist Annulator-Rechtsideal.

Bew.: $l_A(\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} S & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M \\ 0 & R \end{pmatrix}$ und $r_A l_A \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

sind sofort nachzurechnen. (Hier kommt zur Wirkung, daß in der Definition von A $\tilde{S}$ und nicht S verwendet wurde.)

(2) $f : \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_A \longrightarrow A_A$ soll hochgehoben werden.

Beh.: $\text{Bi}(f) \hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Bew.: Sei $m \in M$, $f(\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = (\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix})$. Dann folgt $0 = f(0) =$

$f((\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix})(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})) = (\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix})(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = (\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix})$, also $x = 0$.

Annahme: Es gibt $(\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \in (\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ mit $f(\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = (\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix})$, wobei

$z \neq 0$. Definiere $p : \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & R \end{pmatrix}_A \ni (\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} m \\ r \end{smallmatrix}) \longmapsto (\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{smallmatrix}) \in A_A$.

Dann ist $p \circ f$ ein von 0 verschiedener A -Rechtsmodul-

Homomorphismus, und $\text{pf}\left(\begin{smallmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \text{pf}\left(\begin{smallmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & zr \end{pmatrix}$.

Daher induziert pf einen R -Rechtsmodul-Homomorphismus

$0 \neq \widetilde{\text{pf}}: M_R \ni m \longmapsto z \in R_R$, Widerspruch zu $M^* = 0$.

Daraus folgt $\text{Bi}(f) \hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dann ist f gegeben durch ein $\varphi \in \text{End}(M_R)$, also ist f

Linksmultiplikation mit $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$.

3.2 Bemerkung $\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_A$ endlich erzeugt $\iff$

M_R endlich erzeugt.

3.3 Hilfssatz Sind T und R links perfekte Ringe und M ein T - R -Bimodul, so ist $A := \begin{pmatrix} T & M \\ 0 & R \end{pmatrix}$ links perfekt.

Beweis. Bekanntlich ist $\text{Ra}(A) = \begin{pmatrix} \text{Ra}(T) & M \\ 0 & \text{Ra}(R) \end{pmatrix}$, also

$A/\text{Ra}(A) \cong T/\text{Ra}(T) \times R/\text{Ra}(R)$ halbeinfach.

Beh.: $\text{Ra}(A)$ ist rechts t -nilpotent.

Bew.: Sei eine Folge $\begin{pmatrix} t_i & m_i \\ 0 & r_i \end{pmatrix}_{i \in \mathbb{N}}$, $\begin{pmatrix} t_i & m_i \\ 0 & r_i \end{pmatrix} \in \text{Ra}(A)$

gegeben. Nach Voraussetzung existiert $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{pmatrix} t_1 & m_1 \\ 0 & r_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_2 & m_2 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} t_n & m_n \\ 0 & r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 t_2 \cdots t_n & m \\ 0 & r_1 r_2 \cdots r_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Nach Voraussetzung existiert } l \in \mathbb{N} \text{ mit}$$

$$\begin{pmatrix} t_1 & m_1 \\ 0 & r_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_2 & m_2 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} t_{n+1} & m_{n+1} \\ 0 & r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m r_{n+1} \cdots r_{n+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

3.4 Beispiel

$$\text{Sei } R := \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q}^{(\mathbb{N})} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}, \text{ sei } M := (\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid \mathbb{Q}).$$

Nach 3.3 ist R perfekt. M ist bei Matrix-Multiplikation ein nicht endlich erzeugter R -Rechtsmodul und $Ra(M) = So(M) = (0 \mid \mathbb{Q})$ ist einfacher großer Untermodul von M .

Beh.: $S = \text{End}(M_R)$ ist Körper (sogar $\cong \mathbb{Q}$).

Bew.: M ist injektive Hülle von $(0 \mid \mathbb{Q})$, wie man leicht mit dem Baerschen Kriterium zeigen kann. Also ist S lokal.

Weiter gilt

$$s \in Ra(S) \iff$$

$$Ke(s) \text{ groß in } M \iff$$

$M/Ke(s) \cong Bi(s)$ ist Faktormodul von $(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid \mathbb{Q}) / (0 \mid \mathbb{Q})$, also direkte Summe von einfachen Moduln eines Typs, der nicht in $So(M)$ vorkommt.

Daher muß $s = 0$ sein, und es folgt $Ra(S) = 0$.

$$\text{Beh.: } M^* = 0.$$

$$\text{Bew.: Annahme: } 0 \neq f : M_R \longrightarrow R_R.$$

$$1. \text{ Fall: } Ke(f) = 0 \implies (\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid \mathbb{Q}) \text{ ist (bis auf Isomorphie)}$$

in R enthalten, Widerspruch aus Dimensionsgründen.

2.Fall: $\text{Ke}(f) \neq 0 \Rightarrow (0 \ Q) \hookrightarrow \text{Ke}(f)$, f induziert

$0 \neq \tilde{f} : (Q^{\mathbb{N}} \ Q)/(0 \ Q) \longrightarrow R_R$, aber es gilt

$$((Q^{\mathbb{N}} \ Q)/(0 \ Q)) \cdot \begin{pmatrix} 0 & Q^{(\mathbb{N})} \\ 0 & Q \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad r \cdot \begin{pmatrix} 0 & Q^{(\mathbb{N})} \\ 0 & Q \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{für}$$

alle $r \in R$, Widerspruch.

Nach 3.1 und 3.2 ist nun $\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_A \hookrightarrow \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} S & S \\ 0 & S \end{pmatrix} & M \\ 0 & R \end{pmatrix} =: A$

ein nicht endlich erzeugter reflexiver Modul über dem Ring

A , und nach 3.3 ist mit R und S auch A perfekt.

(A ist sogar semi-primär mit dem Nilpotenzgrad 3.)

Der in 3.4 konstruierte Ring ist kein S -Ring. Offen bleibt folgendes Problem:

Ist jeder reflexive Modul über einem perfekten S -Ring endlich erzeugt? (vergl. 2.5(1))

Eine positive Antwort würde die alte Frage von Osofsky [22] lösen, ob ein perfekter Ring, der rechts injektiver Kogenerator ist, bereits ein QF-Ring sein muß.

§4. REFLEXIVE MODULN ÜBER SEMI-PRIMÄREN RINGEN VOM NILPOTENZGRAD 2

In diesem Paragraphen bestimmen wir sämtliche reflexiven Moduln über gewissen semi-primären Ringen (4.2(4)). Daneben gehen wir folgendem Problem nach. Für jeden Modul M gelten bekanntlich die Implikationen

$$\begin{aligned} M \text{ reflexiv} &\Rightarrow M^* \text{ reflexiv}, \\ M^{**} \text{ reflexiv} &\Rightarrow M^* \text{ reflexiv}. \end{aligned}$$

Mit M sind dann auch M^* , M^{**} , ... reflexiv, und ist andererseits M^* nicht reflexiv, so auch M^{**} , M^{***} , ... nicht. Ist R_R Kogenerator, so gilt für jeden Modul M_R

$$(*) \quad M^* \text{ reflexiv} \Rightarrow M \text{ reflexiv}.$$

F. Kasch stellte die Frage: Ist umgekehrt R_R ein Kogenerator, wenn jeder R -Rechtsmodul $(*)$ erfüllt?

Die Antwort lautet nein. Wir geben in 4.2(5) eine andere Klasse von Ringen an, die der Bedingung $(*)$ genügen und untersuchen weiter, welche Eigenschaften solche Ringe haben.

4.1 Definition R heißt Rechts- $(*)$ -Ring, wenn für jeden R -Rechtsmodul gilt:

$$M^* \text{ reflexiv} \Rightarrow M \text{ reflexiv}.$$

4.2 Satz (1) Seien R perfekt und $\text{So}(R_R) = \text{So}({}_R R)$. Dann ist R ein S-Ring.

(2) Seien R semi-primär, $N^2 = 0$, wobei $N := Ra(R)$.

Sei $0 \neq M_R$ torsionslos und direkt unzerlegbar. Dann ist M_R einfach oder ein lokaler projektiver Modul, d.h. isomorph zu eR für ein geeignetes primitives Idempotent $e \in R$.

(3) Seien R semi-primär mit der Eigenschaft $N^2 = 0$ und $So(R_R) = So({}_R R)$. Sei jeder einfache R -Linksmodul reflexiv. Dann ist R ein QF-Ring.

(4) Seien R semi-primär, $N^2 = 0$, $So(R_R) = So({}_R R)$, $Lä(R_R) + Lä({}_R R) \leq |N|$, und sei M_R reflexiv.

Dann ist M_R endliche direkte Summe einfacher reflexiver und lokaler projektiver Moduln.

(5) Seien R primär zerlegbar, $N^2 = 0$, $So(R_R) = So({}_R R)$ und $Lä(R_R) + Lä({}_R R) \leq |N|$.

Dann gilt für jeden R -(Rechts-)Modul M :

$$M^* \text{ reflexiv} \Rightarrow M \text{ reflexiv}.$$

R ist also $(*)$ -Ring.

Beweis. (1) Für jedes primitive Idempotent $e \in R$ gilt $So(R_R) \cdot e = So({}_R R) \cdot e = So(Re) \neq 0$, da R perfekt. Daraus folgt, daß jeder einfache R -Rechtsmodul bis auf Isomorphie in $So(R_R)$ vorkommt. Analog für einfache R -Linksmoduln.

(2) Ist M_R nicht einfach, so existieren $0 \neq m \in Ra(M)$ und $f \in M^*$ mit $f(m) \neq 0$. $Bi(f)$ ist nicht halbeinfach, sonst

wäre $M/Ke(f)$ halbeinfach, also $Ra(M) \subsetneq Ke(f)$.

Wegen $N^2 = 0$ ist $N \subsetneq So(R_R)$, also gilt $\overline{Bi(f)} :=$

$Bi(f) + N / N \neq 0$. Daher gibt es ein Idempotent $0 \neq e \in R$

mit $\overline{Bi(f)} = \overline{eR}$, das heißt $Bi(f) + N = eR + N$.

Es folgt $e \cdot Bi(f) + eN = eR + eN = eR$, also $e \cdot Bi(f) = eR$

wegen eN klein in eR . Der Epimorphismus

$$M \xrightarrow{f} Bi(f) \xrightarrow{e \cdot} e \cdot Bi(f) = eR$$

zerfällt, und es folgt $M_R \cong eR$ lokal projektiv.

(3) ${}_R(R/N)$ reflexiv $\Rightarrow {}_R(R/So(R))$ reflexiv. Dann ist

$$\mathfrak{z} : {}_R R \ni r \longmapsto r \cdot \in [{}_R So(R)]^* = N^*$$

ein Epimorphismus (Rutter [23], Lemma 1), also $\text{Ext}_R^1(.R/N, .R)$

$= 0$. Nach Mochizuki [16], Prop. 2.6, ist dann ${}_R R$ injektiv

und nach (1) auch Kogenerator. Damit ist ${}_R So(R)$ von end-

licher Länge, also ${}_R R$ wegen $N \subsetneq So(R)$ artinsch.

(4) Nach 2.5 ist M_R endlich erzeugt, also endliche direkte

Summe reflexiver Moduln. Die Behauptung folgt mit 4.2(2).

(5) Nach 2.5 ist M^* endlich erzeugt, also $M^*/Ra(M^*)$ von

endlicher Länge n . Da jede Zerlegung $M = M_1 \oplus M_2$ ($M_i \neq 0$)

eine Zerlegung $M^* \cong M_1^* \oplus M_2^*$ induziert und $Ra(M_i^*) \subsetneq M_i^*$

gilt, folgt daraus, daß M sich als direkte Summe von

höchstens n direkt unzerlegbaren direkten Summanden schrei-

ben läßt: $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$, $k \leq n$, $0 \neq M_i$ direkt unzerlegbar.

Man erhält $M^* \cong M_1^* \oplus \dots \oplus M_k^*$, und mit M^* sind auch M_i^*

reflexiv. Damit haben wir erreicht, daß wir M als direkt unzerlegbar voraussetzen dürfen. Ohne Einschränkung nehmen wir ferner R primär an.

1.Fall: M^* halbeinfach.

Wenn $M^* = 0$, so auch $M = 0$, und man ist fertig.

Andernfalls ist der (bis auf Isomorphie einzige) einfache R -Linksmodul reflexiv, also R nach 4.2(3) ein QF-Ring. Daraus folgt, daß mit M^* auch M reflexiv ist.

2.Fall: M^* nicht halbeinfach.

Sei $f \in M^* \setminus \text{So}(M^*)$. Nach 2.8 ist $f(\text{Ra}(M)) \neq 0$. Wie im Beweis von 4.2(2) schließt man, daß M lokaler projektiver Modul ist, also reflexiv.

4.3 Beispiele Sei K ein Körper.

$$R_1 := \frac{K[X,Y]}{(X^2, XY, Y^2)}, \quad R_2 := \frac{K[X_i]_{i \in \mathbb{N}}}{(\{X_i X_j\}_{i,j \in \mathbb{N}})}.$$

R_1 und R_2 sind $(*)$ -Ringe, aber keine Kogeneratorringe.

R_1 ist artinsch, R_2 ist nicht artinsch.

Die reflexiven Moduln über R_1 bzw. R_2 sind genau die endlich erzeugten freien (=projektiven) Moduln.

Alle diese Aussagen folgen aus 4.2(4), wenn man beachtet, daß

$$R_1 \text{ und } R_2 \text{ lokal sind und } \text{Ra}(R_1) = K \cdot \bar{X} + K \cdot \bar{Y},$$

$$\text{Ra}(R_2) = \sum_{i \in \mathbb{N}} K \cdot \bar{X}_i \text{ gelten.}$$

4.4 Satz (1) Seien R Links- $(*)$ -Ring und ${}_R M \neq 0$. Dann ist $M^* \neq 0$. Insbesondere ist R Links-S-Ring.

(2) Seien R Links- $(*)$ -Ring und ${}_R M$ voll. Dann ist ${}_R M$ reflexiv.

(3) Seien R Links- $(*)$ -Ring und R_R injektiv. Dann sind Faktormoduln von reflexiven R -Linksmoduln reflexiv. Insbesondere ist R Links-Annulator-Ring (d.h. für jedes Linksideal L gilt $l_A r_A(L) = L$).

(4) Seien R Links- $(*)$ -Ring und R_R Kogenerator. Dann ist R Links- und Rechts-Annulator-Ring, R_R ist injektiv, R ist semi-perfekt.

Beweis. (1) $M^* = 0 \Rightarrow M^*$ reflexiv $\Rightarrow$

$\phi_M : M \longrightarrow M^{**} = 0$ Isomorphismus.

(2) Nach Jans [11], "Third Dual Theorem", kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 M^*_R & \xrightarrow{\phi_{M^*}} & M^{***}_R \\
 \downarrow id & \swarrow \phi^*_M = \text{Hom}_R(\phi_M, R) & \\
 M^*_R & &
 \end{array}$$

ϕ_M Epimorphismus $\Rightarrow \phi^*_M$ Monomorphismus $\Rightarrow$

ϕ_M^* Isomorphismus $\Rightarrow \phi_{M^*}^*$ Isomorphismus $\Rightarrow$
 M^* reflexiv $\Rightarrow M$ reflexiv .

(3) Seien ${}_R X$ reflexiv und ${}_R Y \subseteq {}_R X$. Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\nu} & X/Y \\
 \phi_X \downarrow & & \downarrow \phi_{X/Y} \\
 X^{**} & \xrightarrow{\nu^{**}} & (X/Y)^{**}
 \end{array}$$

Wegen R_R injektiv ist ν^{**} Epimorphismus. Mit ϕ_X ist dann auch $\phi_{X/Y}$ Epimorphismus. Nach (2) ist X/Y reflexiv. Da insbesondere alle zyklischen R -Linksmoduln reflexiv sind, ist R nach Rutter [23] , Lemma 1, ein Links-Annulator-Ring.

(4) Nach (1) ist R Links-S-Ring. Nach Kasch, Schneider, Stolberg [14] , Prop. 3.5, ist R_R injektiv.

Aus (3) folgt die Links-Annulator-Eigenschaft, nach Onodera [20] , Folgerung S. 406, die Rechts-Annulator-Eigenschaft. Dann ist R komplementiert, also semi-perfekt.

4.5 Bemerkungen

(1) Es ist nicht bekannt, ob R unter den Voraussetzungen von 4.4(3) oder 4.4(4) bereits ein Ring mit vollkommener Dualität ist.

(2) Es gibt Links- $(*)$ -Ringe, die nicht Rechts- $(*)$ -Ringe sind. Als Beispiel dient der nicht injektive Links-Kogeneratorring von Osofsky [22], ex. 2. Dieser ist nicht einmal Rechts-S-Ring.

§5. DUALITÄTSEIGENSCHAFTEN VON MODULN ÜBER QF-RINGEN

Nach Dieudonné [5] haben endlich erzeugte Moduln über QF-Ringen ebenso gute Dualitätseigenschaften wie endlich-dimensionale Vektorräume. In diesem Abschnitt interessieren wir uns für Dualitätseigenschaften beliebiger Moduln über QF-Ringen. In 5.4(2) und 5.4(3) geben wir einen Zusammenhang zwischen den Faktoren der absteigenden Loewy-Kette von M und den Faktoren der aufsteigenden Loewy-Kette von M^* . Weiter stellen wir in 5.4(4) fest, daß QF-Ringe durch die in 5.4(2) angegebene Eigenschaft ihrer Moduln gekennzeichnet sind.

In 5.5 vergleichen wir aufsteigende Kompositionsketten von M und M^* und zeigen, daß nicht endlich erzeugte Moduln über QF-Ringen ähnliche Dualitätseigenschaften wie unendlich-dimensionale Vektorräume besitzen.

5.1 Hilfssatz Seien M ein Rechtsmodul über dem semi-lokalen Ring R und $N := Ra(R)$. Dann gilt für $i \in \mathbb{N}$:

$$(1) \quad Ra^i(M) = M \cdot N^i$$

$$(2) \quad So^i(M) = l_M(N^i)$$

($l_M(-)$ bezeichnet den Links-Annulator in M .)

Beweis. (1) Für alle R -Rechtsmoduln X gilt $Ra(X) = X \cdot N$. Daraus folgt die Behauptung durch vollständige Induktion über i .

(2) Vollständige Induktion über i .

$i = 1$: $\text{So}(M) = l_M(N)$, da R semi-lokal.

$i \longrightarrow i+1$: Beh.: $\text{So}^{i+1}(M) = l_M(N^{i+1})$.

Bew.: " $\subset$ " Wegen $\text{So}^{i+1}(M)/\text{So}^i(M)$ halbeinfach ist

$\text{Ra}(\text{So}^{i+1}(M)) = \text{So}^{i+1}(M) \cdot N \subset \text{So}^i(M)$. Daraus folgt

$\text{So}^{i+1}(M) \cdot N^{i+1} \subset \text{So}^i(M) \cdot N^i = l_M(N^i) \cdot N^i = 0$.

" $\supset$ " Wegen $[l_M(N^{i+1})/l_M(N^i)] \cdot N = 0$ ist $l_M(N^{i+1})/\text{So}^i(M)$ halbeinfach.

Die nächste Folgerung verallgemeinert Theorem 4.2 von Fleury [7] stark.

5.2 Folgerung Sei R ein semi-primärer Ring mit der Eigenschaft $\text{So}(R_R) = \text{So}({}_R R)$. Dann stimmen die aufsteigenden Loewy-Ketten von R_R und ${}_R R$ überein.

Beweis. Aus $r_R(N) = \text{So}(R_R) = \text{So}({}_R R) = l_R(N)$ folgt nach Nakayama [19], Theorem 6, $r_R(N^i) = l_R(N^i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. 5.1(2) liefert die Behauptung.

5.3 Bemerkung Ist M ein Modul über dem semi-primären Ring R , so stimmt die kleinste Zahl i mit $\text{Ra}^i(M) = 0$ nach 5.1 mit der kleinsten Zahl i mit $\text{So}^i(M) = M$ überein. Sie wird als Höhe von M , $h(M)$, bezeichnet.

Die Aussage 5.4(3) verallgemeinert Theorem 4.1 von Fleury [7]

5.4 Satz (1) Sei M_R ein Rechtsmodul über dem semi-lokalen Ring R und gelte $So(R_R) = So({}_R R)$. Dann ist für $i \in \mathbb{N}$

$$\alpha_i : So^i(M^*) \ni f \longmapsto (m + Ra^i(M) \longmapsto f(m)) \in (M/Ra^i(M))^*$$

ein R -Linksmodul-Isomorphismus.

(2) Sei M_R ein Rechtsmodul über dem QF-Ring R . Dann ist für $i \in \mathbb{N}$ der natürliche R -Linksmodul-Monomorphismus

$$\beta_i : M^*/So^i(M^*) \ni \bar{f} \longmapsto (m \longmapsto f(m)) \in Ra^i(M)^*$$

ein Isomorphismus.

(3) Sei M_R ein Rechtsmodul über dem QF-Ring R . Dann ist für $i \in \mathbb{N}$ der natürliche R -Linksmodul-Monomorphismus

$$\gamma_i : \frac{So^{i+1}(M^*)}{So^i(M^*)} \ni \bar{f} \longmapsto (\bar{m} \longmapsto f(m)) \in \left(\frac{Ra^i(M)}{Ra^{i+1}(M)} \right)^*$$

ein Isomorphismus.

(4) Ist R semi-primärer S -Ring und $\beta_{h(M)-1}$ für alle R -Moduln ein Isomorphismus, so ist R ein QF-Ring.

Beweis. (1) Mit Hilfe von $l_R(N^i) = r_R(N^i)$ zeigt man wie im Beweis von 2.8 $Ra^i(M)^0 = So^i(M^*)$, woraus die Behauptung folgt.

(2) Anwendung von $\text{Hom}_R(-, R)$ auf die exakte Folge

$$0 \longrightarrow Ra^i(M) \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\nu} M/Ra^i(M) \longrightarrow 0$$

führt zur ersten Zeile von

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & (M/Ra^i(M))^* & \xrightarrow{\nu^*} & M^* & \xrightarrow{\iota^*} & Ra^i(M)^* \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow \alpha_i & & \parallel & & \uparrow \beta_i \\
 0 & \longrightarrow & So^i(M^*) & \hookrightarrow & M^* & \longrightarrow & M^*/So^i(M^*) \longrightarrow 0 .
 \end{array}$$

β_i macht das Diagramm kommutativ. Mit (1) folgt die Behauptung.

(3) Folgt aus (2), wenn man $So^{i+1}(M^*) = Ra^{i+1}(M)^0$ beachtet.

(4) Sei M injektive Hülle eines einfachen R -Moduls. Da R ein S -Ring ist, gibt es $0 \neq g \in Ra^{h(M)-1}(M)^*$. Sei $\bar{f}$ ein $\beta_{h(M)-1}$ -Urbild von g . Dann ist $Ra^{h(M)-1}(M) = So(M)$ nicht in $Ke(f)$ enthalten, also f Monomorphismus. Damit ist R Kogeneratorring, woraus die Behauptung folgt.

5.5 Folgerung Sei M_R ein Rechtsmodul über dem QF-Ring R .

Sei $\{E_1, \dots, E_n\}$ ein Repräsentantensystem aller einfachen R -Rechtsmoduln. Dann ist bekanntlich $\{E_1^*, \dots, E_n^*\}$ ein Repräsentantensystem aller einfachen R -Linksmoduln.

Sei (X, α, M) eine aufsteigende Kompositions-kette von M .

$$\varepsilon_i := |\{k \in \alpha \mid X_k + / X_k \cong E_i\}|$$

$$(\text{dann ist } L\ddot{a}(M) = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)$$

$$\delta_i := \begin{cases} \varepsilon_i, & \text{falls } \varepsilon_i < \aleph \\ |\text{End}(E_{iR})|^{\varepsilon_i}, & \text{falls } \varepsilon_i \geq \aleph \end{cases}$$

Ist dann (Y, β, M^*) eine aufsteigende Kompositionskette von M^* , so gilt

$$\delta_i = |\{k \in \beta \mid Y_{k^+}/Y_k \cong E_i^*\}|,$$

$$\text{und } \text{Lä}(M^*) = \delta_1 + \dots + \delta_n.$$

Beweis. Nach 1.9 sind $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ unabhängig von der Wahl der aufsteigenden Kompositionskette. Wir wählen eine Verfeinerung der absteigenden Loewy-Kette von M , wenden Satz 5.4(3) an und bestimmen die Faktoren der aufsteigenden Loewy-Kette von M^* . (Dabei geht man wie im Beweis von Satz 2.3 vor. Man beachtet, daß alle einfachen R -Moduln endlich-dimensional über ihrem Endomorphismenring sind und benutzt den Satz von Erdős und Kaplansky.)

§6. MORITA-ÄQUIVALENZ UND DUALITÄTSEIGENSCHAFTEN

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wann darstellbare Funktoren Dualitätseigenschaften von Moduln erhalten. Als Folgerung ergibt sich, daß die Eigenschaften reflexiv, torsionslos, voll, Rechts-RE-Ring, Rechts-(*)-Ring morita-invariant sind.

Einige Ergebnisse aus §6 werden wir im nächsten Paragraphen anwenden.

6.1 Beispiele Seien $X \in \text{Mod-}R$ und $S = \text{End}(X_R)$.

(1) Der Funktor $\text{Hom}_R({}_S X, -) : \text{Mod-}R \longrightarrow \text{Mod-}S$ erhält im allgemeinen nicht reflexive Moduln.

Sei $R := \left\{ \begin{pmatrix} x & a \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}_p = \text{End}(\mathbb{Z}_{p^\infty}), a \in \mathbb{Z}_{p^\infty} \right\}$ (siehe

Osofsky [22], ex. 1). $A := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}_{p^\infty} \right\}$ ist als

Rechtsideal des injektiven Kogeneratorringes R reflexiv.

Sei $X_R := R/A$.

Dann ist $\text{Hom}_R({}_S X, A)_S \cong \text{Hom}_R({}_S (R/A), R)_S \cong {}_R(A)_S = A_S$,
 $S = \text{End}(R/A)_R \cong R/A$.

A_S ist nicht torsionslos, es gilt sogar $\text{Hom}_S(A, S) = 0$.

(2) Der Funktor $\text{Hom}_R(-, {}_S X) : \text{Mod-}R \longrightarrow S\text{-Mod}$ erhält im allgemeinen nicht reflexive Moduln.

Sei $R = \mathbb{Z}$, $X_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$. $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}_{\mathbb{Z}}$ ist reflexiv, aber nicht

$${}_Q \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}, {}_Q \mathbb{Q}) \cong {}_Q \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, {}_Q \mathbb{Q})^{\mathbb{N}} \cong {}_Q \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}.$$

6.2 Definition Seien $X, X', Y \in \text{Mod-}R$, $f \in \text{Hom}_R(X, X')$,
 $S = \text{End}(Y_R)$.

$$(1) \quad \phi_X^Y : X_R \longrightarrow \text{Hom}_S(\text{Hom}_R(X, Y), Y)_R$$

wird definiert durch

$$(g)(\phi_X^Y(x)) := g(x), \text{ wobei } x \in X, g \in \text{Hom}_R(X, Y).$$

$$(2) \quad X^{*Y} := \text{Hom}_R(X, Y)$$

$$(3) \quad f^{*Y} := \text{Hom}(f, Y)$$

Für S -Linksmoduln verwenden wir diese Definitionen entsprechend (Mißverständnisse treten nicht auf). Nach wie vor schreiben wir ϕ_X statt ϕ_X^R , X^* statt X^{*R} , f^* statt f^{*R} .

6.3 Hilfssatz Seien $M, P \in \text{Mod-}R$, $S = \text{End}(P_R)$.

(1) Ist ${}_S P$ ein Generator, so ist der natürliche R -Homomorphismus
 $\mathfrak{g} : \text{Hom}_S(\text{Hom}_R(M, P), P)_R \ni f \longmapsto$
 $\cdot f \in \text{Hom}_R(\text{Hom}_S(P, \text{Hom}_R(M, P)), \text{Hom}_S(P, P))_R$
 ein Isomorphismus.

(2) Ist P_R treu-balanziert, so ist der natürliche R -Homomorphismus

$$\sigma : {}_R R \ni r \longmapsto \cdot r \in {}_R \text{Hom}_S(P, P)$$

ein Isomorphismus.

(3) Ist P_R ein Generator, so ist der natürliche R -Homomorphismus

$\tau : {}_R M^* \longrightarrow {}_R \text{Hom}_S(.P, .\text{Hom}_R(M., P.))$, wobei
 $((p)(\tau(f)))(m) := p \cdot f(m)$, $p \in P$, $m \in M$, $f \in M^*$,
 ein Isomorphismus.

Beweis. (1) Nach dem Satz von Gabriel-Popescu ist der
 Funktor $\text{Hom}_S(.P, .-)$ volltreu.

(2) Das ist die Definition von "treu-balanziert".

(3) τ Monomorphismus: $\tau(f) = 0$ impliziert $P \cdot f(M) = 0$,
 wegen P_R treu ist $f(M) = 0$, also $f = 0$.

τ Epimorphismus: Seien $y_i \in P^*$, $p_i \in P$, $i=1, \dots, n$, mit
 $\sum y_i(p_i) = 1$. Sei $x \in \text{Hom}_S(.P, .\text{Hom}_R(M., P.))$. Dann gilt
 $(p)x = (p \cdot \sum y_i(p_i))x = (\sum (p y_i)p_i)x = p(\sum y_i(p_i)x)$, also
 $\tau(\sum y_i(p_i)x) = x$.

6.4 Satz Seien $M, P \in \text{Mod-}R$, P_R Progenerator , $S = \text{End}(P_R)$.

(1) Die folgende Abbildung γ^* ist ein R -Isomorphismus.

$$\begin{aligned} & M \overset{*}{P} \overset{*}{P} \underset{R}{} \\ &= \text{Hom}_S(. \text{Hom}_R(M., P.), .P)_R \\ &\xrightarrow{S} \text{Hom}_R(. \text{Hom}_S(.P, .\text{Hom}_R(M., P.)), .\text{Hom}_S(.P, .P))_R \\ &\xrightarrow{\text{Hom}(id, \gamma^{-1})} \text{Hom}_R(. \text{Hom}_S(.P, .\text{Hom}_R(M., P.)), .R)_R \\ &\xrightarrow{\text{Hom}(\tau, id)} \text{Hom}_R(.M^*, .R)_R \\ &= M^{**} \underset{R}{} \end{aligned}$$

(2) Das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc}
 M_R & \xrightarrow{\phi_M^P} & M^{*P} {}^{*P} R \\
 & \searrow \phi_M & \downarrow \gamma \\
 & & M^{**} R
 \end{array}$$

Beweis. (1) folgt aus Hilfssatz 6.3.

(2) nachzurechnen.

6.5 Satz Seien $M, P \in \text{Mod-}R$, P_R Generator, $S = \text{End}(P_R)$.

Sei δ der S -Homomorphismus

$$\delta : {}_S M^{*P} {}^{*P} \ni f \longmapsto f \cdot \in {}_S \text{Hom}_R(P, M) {}^{*S}.$$

(1) δ ist Isomorphismus.

(2) Die Abbildungen

$$\alpha : \text{Hom}_R(P, M^{*P} {}^{*P})_S \longrightarrow \text{Hom}_R(P, M) {}^{*S} {}^{*S} {}_S,$$

$$((k)(\alpha(h)))(p) := (\delta^{-1}(k))(h(p)), \text{ wobei}$$

$$h \in \text{Hom}_R(P, M^{*P} {}^{*P}), k \in \text{Hom}_R(P, M) {}^{*S}, p \in P, \text{ und}$$

$$\beta : \text{Hom}_R(P, M) {}^{*S} {}^{*S} {}_S \longrightarrow \text{Hom}_R(P, M^{*P} {}^{*P})_S,$$

$$f((\beta(g))(p)) := ((\delta(f))g)(p), \text{ wobei}$$

$$g \in \text{Hom}_R(P, M) {}^{*P} {}^{*P}, f \in M^{*P}, p \in P$$

sind zueinander inverse S -Isomorphismen.

(3) Das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc}
 & & \text{Hom}_R(P., M.) \quad {}^*S \quad {}^*S \quad S \\
 & \nearrow \phi_{\text{Hom}_R(P, M)}^S & \uparrow \alpha \\
 \text{Hom}_R(P., M.)_S & \xrightarrow{\text{Hom}(id, \phi_M^P)} & \text{Hom}_R(P., M \quad {}^*P \quad {}^*P.)_S
 \end{array}$$

Beweis. (1) Den volltreuen Funktor $\text{Hom}_R(P., -.)$ auf $\text{Hom}_R(M., P.)$ anwenden.
 (2), (3) nachzurechnen.

Wir sind jetzt in der Lage, eine hinreichende Bedingung dafür anzugeben, daß der kovariante Hom-Funktor Dualitätseigenschaften erhält.

6.6 Satz Seien $P, M \in \text{Mod-}R$, P_R Progenerator, $S = \text{End}(P_R)$. Ist M_R reflexiver (bzw. torsionsloser, bzw. voller) R -Rechtsmodul, so ist $\text{Hom}_R(P., M.)_S$ reflexiver (bzw. torsionsloser, bzw. voller) S -Rechtsmodul.

Beweis.
 Nach 6.4 und 6.5 kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Hom}_R(P., M.)^{*S *S}_S & & \\
 & \nearrow & \uparrow \cong \alpha & & \\
 \phi_{\text{Hom}_R(P, M)}^S & & & & \\
 \text{Hom}_R(P., M.)_S & \xrightarrow{\text{Hom}(\text{id}, \phi_M^P)} & \text{Hom}_R(P., M^{*P *P}.)_S & & \\
 & \searrow \text{Hom}(\text{id}, \phi_M) & \downarrow \cong \text{Hom}(\text{id}, *) & & \\
 & & \text{Hom}_R(P., M^{**}.)_S & &
 \end{array}$$

Man liest ab:

$$\begin{aligned}
 \phi_M \text{ Isomorphismus (bzw. Monomorphismus)} & \Rightarrow \\
 \phi_{\text{Hom}_R(P, M)}^S \text{ Isomorphismus (bzw. Monomorphismus).} \\
 \phi_M \text{ Epimorphismus (und } P_R \text{ projektiv)} & \Rightarrow \\
 \phi_{\text{Hom}_R(P, M)}^S \text{ Epimorphismus.}
 \end{aligned}$$

6.7 Folgerungen (1) Reflexivität, Torsionslosigkeit und Vollheit sind morita-invariante Eigenschaften.

(2) Die Eigenschaften eines Ringes, Rechts-RE-Ring bzw. Rechts-(*)-Ring zu sein, sind morita-invariant.

Beweis. (1) folgt sofort aus 6.6.

(2) Seien R Rechts-RE-Ring, P_R Progenerator, $S = \text{End}(P_R)$. Sei X_S reflexiv. Dann ist $\text{Hom}_S(P^*, X.)_R$ reflexiv, also endlich erzeugt. Daraus folgt, daß $X_S \cong \text{Hom}_R(P., \text{Hom}_S(P^*, X.))_S$

endlich erzeugt ist (eine Äquivalenz erhält bekanntlich die Eigenschaft "endlich erzeugt"). Folglich ist S Rechts-RE-Ring.

Sei jetzt R Rechts- $(*)$ -Ring, und sei ein S -Rechtsmodul X_S gegeben mit der Eigenschaft ${}_S\text{Hom}_S(X., S.)$ reflexiv. Durch Anwendung von 6.3(3) (mit X_S statt M_R und P^* statt P) erhält man den Isomorphismus ${}_S\text{Hom}_S(X., S.) \cong {}_S\text{Hom}_R({}_S P^*, {}_S\text{Hom}_S(X., P^*))$, und nach 6.6 ist ${}_R\text{Hom}_S(X., P^*)$ reflexiv.

Also ist auch ${}_R\text{Hom}_S(X., P^*) \cong {}_R\text{Hom}_R(\text{Hom}_S(P^*, X.), \text{Hom}_S(P^*, P^*)) \cong {}_R\text{Hom}_S(P^*, X.)^*$ reflexiv (den ersten Isomorphismus erhält man aus dem Satz von Gabriel-Popescu). Da R nach Voraussetzung Rechts- $(*)$ -Ring ist, ergibt sich die Reflexivität von $\text{Hom}_S(P^*, X.)_R$.

Eine weitere Anwendung von 6.6 liefert die Reflexivität von $X_S \cong \text{Hom}_R({}_S P., \text{Hom}_S(P^*, X.)_S)$, die nachzuweisen war.

Wir bemerken noch, daß sich Satz 6.6 folgendermaßen verschärfen läßt, wenn man nur nach der Erhaltung der Torsionslosigkeit durch den kovarianten Hom-Funktor fragt.

6.8 Satz Seien $M, P \in \text{Mod-}R$ und $S = \text{End}(P_R)$.

$\text{Hom}_R(P., -.) : \text{Mod-}R \longrightarrow \text{Mod-}S$ erhält genau dann torsionslose Moduln, wenn P_S^* torsionslos ist.

Beweis. " $\Rightarrow$ " R_R torsionslos $\Rightarrow \text{Hom}_R(P., R.)_S = P^*_S$ torsionslos.

" $\Leftarrow$ " Nach Jans [11], p. 68, ist ein Modul X_R genau dann torsionslos, wenn es eine Menge I und einen Monomorphismus $i : X_R \longrightarrow R^I_R$ gibt.

Sei nun M_R torsionslos, $j : M_R \longrightarrow R^J_R$ ein Monomorphismus. Dann ist $\text{Hom}(P, j) : \text{Hom}_R(P, M)_S \longrightarrow \text{Hom}_R(P, R^J)_S \cong P^{*J}_S$ ein Monomorphismus. Nach Voraussetzung existieren eine Menge I und ein Monomorphismus $P^*_S \longrightarrow S^I_S$. Dann läßt sich $\text{Hom}_R(P, M)_S$ in $S^{I \times J}_S$ einbetten, ist also torsionslos.

6.9 Hilfssatz Seien $M, P \in \text{Mod-}R$. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 S^M * P & \xrightarrow{\phi^P_{M * P}} & S^M * P * P * P \\
 \downarrow id & \searrow \phi^P_M * P & \\
 S^M * P & &
 \end{array}$$

Beweis wie im Spezialfall $P_R = R_R$ (siehe Jans [11], p. 67).

Damit ergibt sich als Gegenstück zu 6.6 und 6.8 für den kontravarianten Hom-Funktor:

6.10 Satz Seien $M, P \in \text{Mod-}R$ und $S = \text{End}(P_R)$.

(1) $\text{Hom}_R(-, P) : \text{Mod-}R \longrightarrow S\text{-Mod}$ macht genau dann alle Moduln torsionslos, wenn ${}_S P$ torsionslos ist.

(2) Seien P_R ein Progenerator und M_R voll. Dann ist ${}_S \text{Hom}_R(M, P)$ reflexiv.

Beweis. (1) " $\Rightarrow$ " R_R torsionslos $\Rightarrow {}_S \text{Hom}_R(R, P) \cong {}_S P$ torsionslos.

" $\Leftarrow$ " Nach 6.9 ist $\phi_{M^*P}^P$ Monomorphismus. Daher gibt es zu jedem $f \in M^*P$ ein $x \in M^*P^*P$ mit $(f)x \neq 0$. Nach Voraussetzung existiert $\alpha : {}_S P \longrightarrow {}_S S$ mit $((f)x)\alpha \neq 0$.

Daraus folgt die Behauptung.

(2) Ist ϕ_M Epimorphismus, dann nach Hilfssatz 6.4 auch ϕ_M^P . Also ist $\phi_M^P {}^*P$ Monomorphismus, nach 6.9 sogar Isomorphismus. Damit ist auch $\phi_{{}_S M^*P}^{{}_S P}$ Isomorphismus.

Mit der Progeneratoreigenschaft von ${}_S P$ folgt wie in 6.4, daß auch ϕ_{M^*P} Isomorphismus ist.

§7. FROBENIUS-ERWEITERUNGEN UND DUALITÄTSEIGENSCHAFTEN

Sei $A \subset B$ eine unitäre Ringerweiterung. Es bezeichnen
 $\text{Res} : \text{Mod-}B \longrightarrow \text{Mod-}A$ den Restriktionsfunktork, der auf
 Objekten $M \in \text{Mod-}B$ durch $\text{Res}(M) := M_A$ definiert ist, und
 $\text{Ind} : \text{Mod-}A \longrightarrow \text{Mod-}B$ den Induktionsfunktork, wobei für
 Objekte $N \in \text{Mod-}A$ $\text{Ind}(N) := N \otimes_A B_B$ gesetzt wird.

Sei jetzt $A \subset B$ eine Frobenius-Erweiterung im Sinne von
 Kasch [12], d.h. B_A ist endlich erzeugt projektiv, und es
 existiert ein Isomorphismus $\mathcal{Y} : {}_A B_B \longrightarrow {}_A \text{Hom}_A(B., A.)_B$.

Wir zeigen: Res erhält und reflektiert reflexive (bzw. tor-
 sionslose, bzw. volle) Moduln (Satz 7.3). Ist B_A Generator,
 so erhält und reflektiert Ind reflexive (bzw. torsionslose,
 bzw. volle) Moduln (Satz 7.4).

Dieses Ergebnis verallgemeinert (und wird motiviert durch)
 bekannte Eigenschaften von Frobeniusalgebren.

Als Folgerung erhalten wir in 7.5: Ist A_A Kogenerator, so
 auch B_B (siehe Onodera [21], Kor.2, S.82). Die Umkehrung
 gilt, wenn B_A Generator ist.

Abschließend zeigen wir in 7.6 und 7.7: Ist A Rechts-RE-
 Ring (bzw. Rechts-(*)-Ring), so auch B . Die Umkehrungen
 gelten, wenn B_A Generator ist.

7.1 Beispiele (1) Eine endlich-dimensionale K -Algebra R_K
 ist genau dann QF-Algebra, wenn der zu $K \subset R$ gehörende

Restriktionsfunktoren reflexive Moduln reflektiert.

$$(2) \text{ Sei } K \text{ ein Körper, } \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix} = A \subset B = \begin{pmatrix} K & K \\ K & K \end{pmatrix}.$$

Dann ist B_A endlich erzeugt projektiv, Res erhält und reflektiert reflexive (bzw. torsionslose, bzw. volle) Moduln, Ind erhält reflexive (bzw. torsionslose, bzw. volle) Moduln, aber Ind reflektiert im allgemeinen nicht reflexive Moduln.

7.2 Bemerkungen (1) Seien $A \subset B$ eine Frobenius-Erweiterung und

$$\varphi : {}_A B_B \longrightarrow {}_A \text{Hom}_A(B, A)_B$$

ein Isomorphismus. Dann ist auch

$$\psi : {}_B B_A \longrightarrow {}_B \text{Hom}_A(.B, .A)_A, \quad (b')(b)\psi := \varphi(b')(b),$$

ein Isomorphismus. φ und ψ werden im folgenden stets in diesem Sinne verwendet.

(2) Ist ${}_A B$ endlich erzeugt projektiv, so ist für $N \in \text{Mod-}A$
 $N \otimes_A B_B \ni n \otimes b \longmapsto (f \longmapsto n \cdot (b)f) \in \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(.B, .A), N)_B$
 ein Isomorphismus.

Ist $A \subset B$ eine Frobenius-Erweiterung, so ist

$$\text{Hom}_A(\text{Hom}_A(.B, .A), N)_B \ni g \longmapsto g\psi \in \text{Hom}_A(B, N)_B$$

ein Isomorphismus; es gilt also

$$\text{Ind}(N)_B \cong \text{Hom}_A(B, N)_B.$$

(3) (siehe Hirata [9], Prop. 2)

Seien $A \subset B$ eine Frobenius-Erweiterung und $M \in \text{Mod-B}$.

Dann ist die Abbildung

$\alpha : {}_A\text{Hom}_B(M., B.) \ni f \longmapsto (\mathcal{V} f(-))(1) \in {}_A\text{Hom}_A(M., A.)$

ein Isomorphismus.

α ist die Komposition der folgenden drei Isomorphismen:

$$\begin{array}{ccc} & {}_A\text{Hom}_B(M., B.) & \\ \xrightarrow{\text{Hom}(id, \mathcal{V})} & {}_A\text{Hom}_B(M., {}_A\text{Hom}_A(B., A.)) & \\ \xrightarrow{\text{kan}} & {}_A\text{Hom}_A(M \otimes_B B., A.) & \\ \xrightarrow{\text{Hom}(m \mapsto m \otimes 1, id)} & {}_A\text{Hom}_A(M., A.) & . \end{array}$$

Entsprechend ist für $X \in B\text{-Mod}$ die Abbildung

$\beta : \text{Hom}_B(.X., .B)_A \ni g \longmapsto (1)((-)g\mathcal{V}) \in \text{Hom}_A(.X., .A)_A$

ein Isomorphismus.

7.3 Satz Sei $A \subset B$ eine Frobenius-Erweiterung. Dann erhält und reflektiert Res reflexive (bzw. torsionslose, bzw. volle) Moduln.

Beweis. Sei ein Modul M_B gegeben. Nach 7.2(3) sind die Abbildungen

$\alpha : {}_A\text{Hom}_B(M., B.) \ni f \longmapsto (\mathcal{V} f(-))(1) \in {}_A\text{Hom}_A(M., A.)$

und (für ${}_B X = {}_B\text{Hom}_B(M., B.)$)

$\beta : \text{Hom}_B(. \text{Hom}_B(M., B.), .B)_A \ni g \longmapsto$

$(1)((-)g\mathcal{V}) \in \text{Hom}_A(. \text{Hom}_B(M., B.), .A)_A$

Isomorphismen.

Es genügt jetzt zu zeigen, daß folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc}
 M_A & \xrightarrow{\phi_{M_A}^{A_A}} & \text{Hom}_A(. \text{Hom}_A(M., A.), .A)_A \\
 \downarrow \phi_{M_B}^{B_B} & & \downarrow \cong \text{Hom}(\alpha, id) \\
 \text{Hom}_B(. \text{Hom}_B(M., B.), .B)_A & \xrightarrow[\cong]{\beta} & \text{Hom}_A(. \text{Hom}_B(M., B.), .A)_A
 \end{array}$$

Man berechnet für $m \in M$ und $k \in \text{Hom}_B(M., B.)$:

$$\begin{aligned}
 (k)(\text{Hom}(\alpha, id) \circ \phi_{M_A}^{A_A}(m)) &= \mathcal{Y}(k(m))(1) \quad \text{und} \\
 (k)(\beta \circ \phi_{M_B}^{B_B}(m)) &= (1)(k(m))\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(1)(k(m)) .
 \end{aligned}$$

Wegen $\mathcal{Y}(b)(1) = (\mathcal{Y}(1) \cdot b)(1) = \mathcal{Y}(1)(b)$ für alle $b \in B$ ist die Behauptung bewiesen.

7.4 Satz Sei $A \subset B$ eine Frobenius-Erweiterung und B_A ein Generator. Dann erhält und reflektiert Ind reflexive (bzw. torsionslose, bzw. volle) Moduln.

Beweis. Sei ein Modul N_A gegeben. Wegen der Progenerator-eigenschaft von B_A ist nach Satz 6.6 N_A genau dann reflexiv (bzw. torsionslos, bzw. voll) in $\text{Mod-}A$, wenn es $\text{Hom}_A({}_S B., N.)_S$ in $\text{Mod-}S$ ist (wobei $S = \text{End}(B_A)$).

Nach Kasch [12], Satz 1, ist mit $A \subset B$ auch $B \subset S$ eine Frobenius-Erweiterung (dabei wird $b \in B$ mit dem Linksmultiplikator $b \cdot \in \text{End}(B_A)$ identifiziert.).

Der zu $B \subset S$ gehörende Restriktionsfunktork erhält und reflektiert nach 7.3 reflexive (bzw. torsionslose, bzw. volle) Moduln.

Also ist $\text{Hom}_A(B., N.)_S$ genau dann reflexiv (bzw. torsionslos, bzw. voll) in $\text{Mod-}S$, wenn es $\text{Hom}_A(B., N.)_B$ in $\text{Mod-}B$ ist. Mit dem Isomorphismus $N \otimes_A B_B \cong \text{Hom}_A(B., N.)_B$ (siehe 7.2(2)) folgt die Behauptung.

Wir bemerken noch, daß für eine Frobenius-Erweiterung $A \subset B$ B_A genau dann Generator ist, wenn ${}_A B$ Generator ist. Das folgt sofort aus dem Isomorphismus $\gamma : {}_A B \longrightarrow {}_A \text{Hom}_A(B., A.)$.

7.5 Folgerungen Sei $A \subset B$ eine Frobenius-Erweiterung.

- (1) Ist A_A Kogenerator, so auch B_B .
- (2) Sei B_A Generator. Ist B_B Kogenerator, so auch A_A .

Beweis. (1) Wir zeigen, daß jeder B -Rechtsmodul torsionslos ist.

Sei M_B gegeben. Nach Voraussetzung ist $\text{Res}(M)_A$ torsionslos, also nach 7.3 auch M_B .

(2) Wir zeigen, daß jeder A -Rechtsmodul torsionslos ist.

Sei N_A gegeben. Nach Voraussetzung ist $N \otimes_A \text{Hom}_A(B., A.)_B$ torsionslos.

$B \subset S$ ($S = \text{End}(B_A)$) ist eine Frobenius-Erweiterung, der zugehörige Restriktionsfunktork reflektiert nach 7.3 torsionslose

Moduln. Also sind $N \otimes_A \text{Hom}_A(B., A.)_S$ und nach 6.6 auch $N \otimes_A \text{Hom}_A(B., A.) \otimes_S B_A$ torsionslos. Dieser Modul ist wegen der Progeneratoreigenschaft von B_A nach dem Satz von Morita zu N_A isomorph.

7.6 Satz Sei $A \subset B$ eine Frobenius-Erweiterung.

- (1) Ist A Rechts-RE-Ring, so auch B .
- (2) Sei B_A Generator. Ist B Rechts-RE-Ring, so auch A .

Beweis. (1) M_B reflexiv $\Rightarrow \text{Res}(M)_A = M_A$ reflexiv $\Rightarrow M_A$ endlich erzeugt $\Rightarrow M_B$ endlich erzeugt.

(2) Sei $S = \text{End}(B_A)$. $B \subset S$ ist eine Frobenius-Erweiterung, also ist nach (1) S Rechts-RE-Ring.

Sei jetzt N_A reflexiv. Wegen 6.6 ist $N \otimes_A \text{Hom}_A(B., A.)_S$ reflexiv, also endlich erzeugt. Dann ist nach dem Satz von Morita auch $N \otimes_A \text{Hom}_A(B., A.) \otimes_S B_A \cong N_A$ endlich erzeugt.

7.7 Satz Sei $A \subset B$ eine Frobenius-Erweiterung.

- (1) Ist A Rechts- $(*)$ -Ring, so auch B .
- (2) Sei B_A Generator. Ist B Rechts- $(*)$ -Ring, so auch A .

Beweis. (1) Sei $M_B \in \text{Mod-}B$ gegeben mit der Eigenschaft ${}_B\text{Hom}_B(M., B.)$ reflexiv in $B\text{-Mod}$. Wegen 7.2(3) und 7.3 ist ${}_A\text{Hom}_A(M., A.) \cong {}_A\text{Hom}_B(M., B.)$ reflexiv in $A\text{-Mod}$. Nach Voraussetzung ist dann $M_A = \text{Res}(M)_A$ reflexiv in $\text{Mod-}A$. Durch

nochmalige Anwendung von 7.3 folgt, daß M_B reflexiv in Mod-B ist.

(2) Sei $N_A \in \text{Mod-A}$ gegeben mit der Eigenschaft ${}_A\text{Hom}_A(N., A.)$ reflexiv in $A\text{-Mod}$. Nach 6.3(3) und 6.6 sind dann

${}_A\text{Hom}_A(N., A.) \cong {}_A\text{Hom}_S(.B., {}_A\text{Hom}_A(N., B.))$ und ${}_S\text{Hom}_A(N., B.)$ reflexiv, und wegen

${}_B\text{Hom}_B(N \otimes_A B., B.) \cong {}_B\text{Hom}_A(N., {}_B\text{Hom}_B(B., B.)) \cong {}_B\text{Hom}_A(N., B.)$
auch ${}_B\text{Hom}_B(N \otimes_A B., B.)$.

Wir nutzen jetzt aus, daß B Rechts- $(*)$ -Ring ist und erhalten die Reflexivität von $N \otimes_A B_B = \text{Ind}(N)_B$. Nach 7.4 ist N_A reflexiv, was zu zeigen war.

LITERATUR

- [1] Anderson, F.W.; Fuller, K.R.: Rings and categories of modules. New York - Heidelberg - Berlin (1974)
- [2] Bass, H.: Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960) 466-488
- [3] Björk, J.-E.: Conditions which imply that subrings of semi-primary rings are semi-primary. J. Algebra 19 (1971) 384-395
- [4] Bourbaki, N.: Algèbre, Chap. VIII. Paris (1958)
- [5] Dieudonné, J.: Remarks on quasi-Frobenius rings. Illinois J. Math. 2 (1958) 346-354
- [6] Fieldhouse, D.J.: Pure theories. Math. Ann. 184 (1969) 1-18
- [7] Fleury, P.: On local QF-rings. Aequationes Math. 16 (1977) 173-179
- [8] Fuchs, L.: Abelian Groups. Budapest (1958)

- [9] Hirata, K.: On relative homological algebra of Frobenius Extensions. Nagoya Math. J. 15 (1959) 17-28
- [10] Jans, J.P.: Duality in noetherian rings. Proc. Am. Math. Soc. 12 (1961) 829-835
- [11] Jans, J.P.: Rings and Homology. New York (1964)
- [12] Kasch, F.: Projektive Frobeniuserweiterungen. Sitzungsberichte Heidelberger Akad. Wiss. (1960/61) 89-109
- [13] Kasch, F.: Moduln und Ringe. Stuttgart (1974)
- [14] Kasch, F.; Schneider, H.-J.; Stolberg, H.J.: On Injective Modules and Cogenerators. Seminarausarbeitung, Carnegie-Mellon-University (1969)
- [15] Levy, L.S.: Commutative rings whose homomorphic images are self-injective. Pac. J. Math. 18 (1966) 149-153
- [16] Mochizuki, H.Y.: Finitistic global dimension of rings. Pac. J. Math. 15 (1965) 249-258
- [17] Morita, K.: Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A(6) (1958) 83-142

- [18] Müller, B.J.: On semi-perfect rings. Illinois J. Math.
14 (1970) 464-467

- [19] Nakayama, T.: On Frobeniusian Algebras I . Ann. Math.
40,3 (1939) 611-633

- [20] Onodera, T.: Über Kogeneratoren. Arch. Math. 19 (1968)
402-410

- [21] Onodera, T.: Koendlich erzeugte Moduln und Kogeneratoren.
Hokkaido Math. J. 2 (1973) 69-83

- [22] Osofsky, B.L.: A Generalization of Quasi-Frobenius Rings.
J. Algebra 4 (1966) 373-387

- [23] Rutter, E.A.: Two characterizations of quasi-frobenius
rings. Pac. J. Math. 30,3 (1969) 777-784

- [24] Schenkman, E.: Group Theory. Princeton (1965)

- [25] Schneider, H.: Reflexivität, orthogonale Komplemente
und perfekte Dualität für adjungierte Funktoren.
Dissertation. Universität München (1971)

- 26] Zimmermann, W.: Einige Charakterisierungen der Ringe,
über denen reine Untermoduln direkte Summanden sind.
Sitzungsberichte d. Bayer. Akad. d. Wiss. München (1973)
77-79
- 27] Zimmermann, W.: Rein injektive direkte Summen von
Moduln. Habilitationsschrift. Universität München (1975)

Lebenslauf

- 19.2.1948 geboren in Bremen als Sohn des Schuhmachers Walter Schulz und seiner Ehefrau Hildegard, geb. Reuter
- 1954 - 1958 Besuch der Volksschule in Bremen-Grohn
- 1958 - 1967 Besuch des Gerhard-Rohlf's-Gymnasiums in Bremen-Vegesack; Abitur
- 1967 - 1968 Dienst im Bundesgrenzschutz
- 1968 - 1970 Studium Mathematik und Physik an der Universität Kiel; Vordiplom in Mathematik
- 1970 - 1974 Studium Mathematik und Physik an der Universität München; Diplom in Mathematik
- seit 1974 wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität München

ALGEBRA - BERICHTE

Seminar F. Kasch, B. Pareigis

Mathematisches Institut der Universität München

Nr. 1	Günther Hauger und Wolfgang Zimmermann:	Quasi-Frobenius-Moduln, 13 S., DM 5,—
Nr. 2	Helmut Zöschinger:	Komplementierte Moduln über Dedekindringen, 16 S., DM 6,—
Nr. 3	Bodo Pareigis:	On K-Theory of Hopf Algebras of Finite Type, 50 S., DM 9,—
Nr. 4	Tilman Würfel:	Über absolut reine Ringe, 29 S., DM 7,—
Nr. 5	Günther Hauger und Wolfgang Zimmermann:	Dichte Ringe, 10 S., DM 4,—
Nr. 6	Helmut Zöschinger:	Komplemente als direkte Summanden, 19 S., DM 6,—
Nr. 7	Thomas Wilhelm:	Polynomideale und Potenzreihenideale über einem Stellenring 12 S., DM 5,—
Nr. 8	Wolfgang Müller:	Symmetrische Algebren mit injektivem Zentrum, 7 S., DM 4,—
Nr. 9	Hans J. Müller:	Eine Charakterisierung rechtsartinscher Ringe über die globale Dimension, 11 S., DM 4,—
Nr. 10	Manfred B. Wischnewsky:	Generalized Universal Algebra in Initialstructure Categories 35 S., DM 8,—
Nr. 11	Toma Albu und Constantin Nastasescu:	Modules Arithmétiques, 24 S., DM 7,—
Nr. 12	Heldi Schnelder:	Reflexivität, orthogonale Komplemente und perfekte Dualität für adjungierte Funktoren, 34 S., DM 8,—
Nr. 13	Helmut Röhrli und Thomas Woolley:	Some elementary properties of the category Top_M I B. 46 S., DM 9,—
Nr. 14	Tilman Würfel:	Kohärenz und Lokalisierung, 16 S., DM 6,—
Nr. 15	Helmut Zöschinger:	Moduln, die in jeder Erweiterung ein Komplement haben, 24 S., DM 7,—
Nr. 16	Manfred B. Wischnewsky:	On regular topological algebras over arbitrary base-categories, 36 S., DM 8,—
Nr. 17	Wolfgang Müller:	Unzerlegbare Moduln über artinschen Ringen, 44 S., DM 9,—
Nr. 18	Günther Hauger und Wolfgang Zimmermann:	Lokalisierung. Vervollständigung von Ringen und Bikommutatoren von Moduln, 42 S., DM 9,—
Nr. 19	Hans-Jürgen Schnelder:	Endliche algebraische Gruppen, 56 S., DM 10,—
Nr. 20	Michael Pfender:	Universal Algebra in S-Monoidal Categories, 38 S., DM 9,—
Nr. 21	Toma Albu:	Sur la Dimension de Gabriel des Modules, 27 S., DM 8,—
Nr. 22	Bruno J. Müller	On Duality for Topological Abelian Groups and Modules, 20 S., DM 7,—
Nr. 23	Hans J. Müller	Die Abelschen Unterkategorien der P- und J-Ko-Präsentierungen 28 S., DM 8,—
Nr. 24	Wolfgang Müller	Artinsche Ringe vom Endlichen Typ, 16 S., DM 6,—
Nr. 25	Toma Albu, Constantin Nastasescu	Modules sur les Anneaux de Krull, 20 S., DM 6,—
Nr. 26	Helmut Röhrli, Manfred Bernd Wischnewsky	Universal Algebra over Hopf-Algebras, 36 S., DM 8,—
Nr. 27	Birge Zimmermann	Endomorphism rings of Self-Generators, 24 S., DM 8,—
Nr. 28	Kozo Sugano	Separable extensions of Quasi-Frobenius rings, 12 S., DM 5,—
Nr. 29	Manfred B. Wischnewsky	On Linear Representations of Affine Groups I, 36 S., DM 9,—
Nr. 30	Wolfgang Zimmermann	Rein injektive direkte Summen von Moduln, 62 S., DM 12,—
Nr. 31	Helmut Zöschinger	Über Torsions- und κ -Elemente von $\text{Ext}(C, A)$, 42 S., DM 9,—
Nr. 32	Günther Hauger	Derivationsmoduln 72 S., DM 14,80
Nr. 33	Tilman Würfel	Ringerweiterungen und Injektivität, 34 S., DM 8,—
Nr. 34	Mitsuhiro Takeuchi	The $\sharp$ -product of group sheaf extensions applied to Long's theory of dimodule algebras, 56 S., DM 11,—
Nr. 35	Thomas S. Ligon	Galois-Theorie in monodialen Kategorien, 110 S., DM 16,80
Nr. 36	Rainer Schulz	Reflexive Moduln über perfekten Ringen, 70 S., DM 12,80
Grundbegriffe der Mathematik F. Kasch und B. Pareigis:		248 S., DM 18,80
B. Pareigis		Endliche Hopf-Algebren, 68 S., DM 11,—
Bruno J. Mueller		Localization of Non-Commutative Noetherian Rings at Semiprime Ideals, 70 S., DM 11,—

Zu beziehen durch: Verlag Uni-Druck, 8 München 40, Amalienstraße 83

